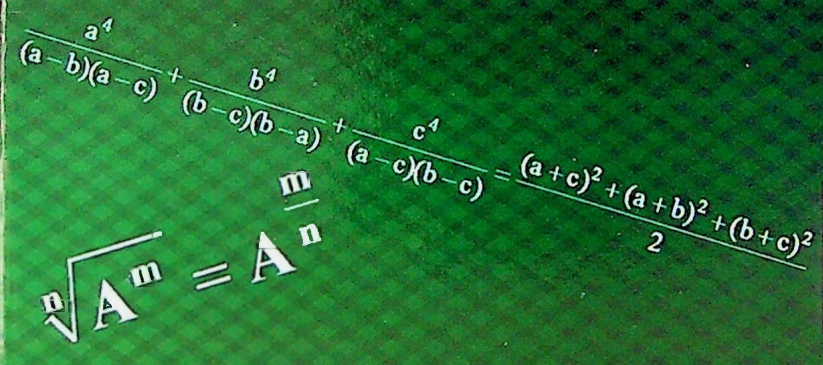
# ELEMENTOS DA MATEMÁTICA

Marcelo Rufino de Oliveira



$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(a-c)(b-c)} = \frac{(a+c)^2 + (a+b)^2 + (b+c)^2}{2}$$

$$\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$$

0

ÁLGEBRA
ARITMÉTICA
PROPORÇÃO
FRAÇÕES

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}\right)$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = \frac{\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_n}{\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n}$$

$$\sqrt{0,4444\ldots} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

**Marcelo Rufino de Oliveira**

**Com formação pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)**

**Desde 1998 desenvolvendo trabalho como:**
**Coordenador de Turmas ITA/IME**
**Professor de Matemática de Turmas ITA/IME**
**Professor de Física de Turmas ITA/IME**
**Professor de Olimpíadas de Matemática**

# ÁLGEBRA
# ARITMÉTICA
# PROPORÇÃO
# FRAÇÕES

2ª edição (2020)

Copyright © 2020 by marcelo rufino de oliveira

Todos os direitos desta edição estão reservados
à Marcelo Rufino de Oliveira
Belém - Pará - Brasil
E-mail: marcelorufino@hotmail.com

Ilustração da Capa
Marcelo Rufino de Oliveira

LOUDES PACHECO
Ficha Catalográfica

F48..... .Oliveira, Marcelo Rufino de

Coleção elementos da matemática, 0 álgebra, aritmética, proporção, frações / Marcelo Rufino de Oliveira. – 2 ed. - Fortaleza. 2020.
454 p.

ISBN: 978-85-6065318-8

É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. os transgressores serão punidos com base no artigo 7°, da lei 9.610/98 Denuncie o plágio ou cópias ilegais anonimamente através do correio eletrônico do autor :

marcelorufino@hotmail.com

Todo o conteúdo dessa obra encontra-se registrado
na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

# APRESENTAÇÃO À 2ª EDIÇÃO

Esta é a segunda edição do volume zero da **Coleção Elementos da Matemática**. A coleção foi inicialmente programada para apresentar apenas o conteúdo de Ensino Médio, dividido em seis volumes. Entretanto, os autores acharam interessante também abranger o conteúdo do Ensino Fundamental, notadamente os tópicos cobrados em concursos militares, fazendo com que o volume 0 fosse adicionado à coleção em 2011 e posteriormente atualizado em 2020. Os principais tópicos abordados no volume 0 são álgebra (potenciação e radiciação, operações algébricas, equações e inequações), sistema métrico, frações (ordinárias e algébricas) e razão e proporção. O capítulo sobre bases de numeração, que constava no apêndice do volume 1, agora será abordado com mais detalhes no volume 0.

Os volumes 1, 2, 3, 4 e 5 desta coleção são reconhecidamente voltados para os vestibulares militares de ensino médio, sobretudo ITA e IME. Os autores da coleção têm recebidos excelentes retornos dos candidatos de concursos militares sobre a importância da coleção em sua preparação. Por outro lado, o volume 0 é voltado para os concursos militares de ensino fundamental, como as provas da Epcar e Colégio Naval. Porém, não se engane com relação à complexidade das provas de matemática destes vestibulares, simplesmente por cobrarem conteúdo de ensino fundamental. São provas dificílimas, ainda mais se levarmos em consideração o grau (ou a falta!!!) de maturidade de um aluno nos anos finais de ensino fundamental. Mesmo assim, este livro pode ser encarado como um livro de embasamento, pois os assuntos são trabalhados de forma bem mais detalhista e com exercícios iniciais bem acessíveis em relação aos demais volumes da coleção. Nesta segunda edição o autor procurou aumentar a quantidade de exercícios de alta dificuldade, resolvidos e propostos, de modo que o aluno já embasado possa aprofundar mais seus conhecimentos.

Em relação à primeira edição, lançada em 2011, foram incorporadas várias atualizações, tais como:

1) introdução de muitos novos exercícios resolvidos e exercícios propostos, com aumento do nível médio de dificuldade dos exercícios do livro, muito em função da inserção de muitas questões de olimpíadas de matemática em vários capítulos desta obra;
2) acréscimo de novos tópicos teóricos, principalmente nos capítulos sobre médias e juros;
3) correção de alguns gabaritos;
4) nova identidade visual;
5) organização dos exemplos resolvidos e exercícios propostos em ordem de dificuldade;
6) aumento do tamanho da fonte utilizada, motivo de muitas reclamações de leitores nas edições anteriores.

O autor deste volume espera que as atualizações adotadas tornem a leitura e o estudo deste livro em uma experiência bem mais agradável.

Os assuntos neste livro são de uma importância ímpar na matemática, pois formam a sua base algébrica e aritmética. A ideia de número muito provavelmente nasceu com a natural necessidade humana de *contar* os objetos do mundo ao seu redor, como animais, frutas ou pessoas. Para esse propósito (*contagem* ou *cardinalidade*), o conjunto dos números naturais serve perfeitamente.

Com o decorrer do tempo houve a necessidade de *medir* grandezas (massas, comprimentos, volumes, tempo, etc.). Medir uma grandeza significa compará-la com outra, da mesma espécie, denominada unidade de medida (padrão). Entretanto, é de esperar-se que nem todo ser humano (ou qualquer outro material) tenha uma massa correspondente a um múltiplo inteiro de 1 kg. É comum encontrar massas "quebradas", isto é, do tipo 87,654 kg, por exemplo. Dessa forma, surge a necessidade da noção dos números racionais (ou "fracionários"), para os quais a unidade é subdividida em quantidade conveniente de partes iguais, até que alguma dessas partes caiba um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

O desenvolvimento da simbologia algébrica sofreu uma evolução ao longo de três fases: a álgebra retórica (ou falada), a álgebra sincopada (emprego de abreviaturas de expressões) e a álgebra simbólica. Nesta última fase, o simbolismo algébrico sofreu várias mudanças, até tornar-se razoavelmente estável. Quem teve papel fundamental no estabelecimento da simbologia algébrica foi o matemático francês François Viéte, que em seu livro IN ARTEM ANALYTICAMISAGOGE, por introduzir letras como coeficientes numéricos. Posteriormente, quem introduziu uma nova revolução na álgebra foi René Descartes, que foi responsável pela aceitação dos números complexos. A simbologia adotada por Descartes é muito parecida com a utilizada atualmente. Possivelmente, seus textos algébricos sejam os mais antigos em que um aluno de matemática consiga entender perfeitamente toda a notação algébrica. Por exemplo, foi Descartes que adotou letras minúsculas para representar números: x, y e z para variáveis e a, b, c e d para coeficientes. Também introduziu a notação de potência como $x^n$ e passou a escrever as equações na forma canônica, ou seja, igualando as equações a zero.

Em tempos mais antigos, como no Egito e na Babilônia, a álgebra era retórica. Os estudiosos da matemáticos na Europa do século XVI foram obrigados a estender a noção indo-arábica de número antes de poderem avançar além dos resultados babilônios de resolução de equações. A álgebra estabelecida por Pitágoras e Euclides na Grécia era eminentemente geométrica. O renascimento da álgebra no continente europeu foi devido à muitos fatores, dentre os quais se destacam:

1. Facilidade na manipulação de trabalhos numéricos por meio do sistema de numeração indo-arábico;
2. Invenção da imprensa;
3. Ressurgimento da economia.

A coleção Elementos da Matemática passou por vários formatos de divisão de conteúdos e autores em seus volumes. Atualmente, a coleção está organizada da seguinte maneira:

**Volume 0 – Álgebra, Aritmética, Proporção e Frações**
**Autor:** Marcelo Rufino de Oliveira

**Volume 1 – Conjuntos, Funções e Teoria dos Números**
**Autor:** Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

**Volume 2 – Geometria Plana**
**Autores:** Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

**Volume 3 – Sequências, Combinatória, Probabilidade e Matrizes**
**Autor:** Marcelo Rufino de Oliveira

**Volume 4 – Números Complexos, Polinômios e Geometria Analítica**
**Autores:** Marcelo Rufino de Oliveira

**Volume 5 – Geometria Espacial e Trigonometria**
**Autor:** Marcelo Rufino de Oliveira

Até a data de lançamento da 2ª edição deste volume (junho de 2020), os volumes 0, 2 e 5 já estão seguindo o novo formato de identidade visual. A proposta é lançar todos os volumes nesse novo formato em um prazo de 3 anos.

Qualquer erro encontrado em um dos volumes pode ser reportado aos autores no e-mail marcelorufino@hotmail.com. Sua contribuição é muito importante para a melhoria da qualidade das próximas tiragens dos livros.

Bom proveito nos seus estudos!!!

O autor

# Índice

**Capítulo 1. Potências e Radiciação**

1. Potências ..... 1
2. Radiciação ..... 7
3. Expoentes Fracionários ..... 10
4. Expoentes Reais ..... 13
5. Métodos de Aproximação para Extração da Raiz Quadrada ..... 15

Exercícios ..... 20

**Capítulo 2. Bases de Numeração**

1. Introdução ..... 30
2. Conversão de uma base b para base 10 ..... 31
3. Conversão de base 10 para uma base b qualquer ..... 34

Exercícios ..... 37

**Capítulo 3. Médias**

1. Média Aritmética ..... 40
2. Média Ponderada ..... 40
3. Média Geométrica ..... 40
4. Média Harmônica ..... 40
5. Média Quadrática ..... 41
6. Desigualdade entre as Médias ..... 41

Exercícios ..... 45

**Capítulo 4. Sistema Métrico**

1. Comprimento ..... 54
2. Área ..... 57
3. Volume ..... 57
4. Ângulo ..... 58
5. Tempo ..... 60
6. Massa ..... 61
7. Conversão entre Unidades Compostas ..... 62

Exercícios ..... 65

**Capitulo 5. Razões e Proporções**
1. Razão entre Duas Grandezas ..... 76
2. Proporção e suas Propriedades ..... 80
3. Regra de Três Simples ..... 92
4. Regra de Três Composta ..... 97
5. Porcentagem ..... 103
6. Juros ..... 113
Exercícios ..... 120

**Capitulo 6. Operações Algébricas**
1. Definições ..... 165
2. Adição e Subtração ..... 169
3. Multiplicação ..... 169
4. Produtos Notáveis ..... 171
5. Divisão de Polinômios ..... 177
6. Fatoração ..... 192
7. Maximo Divisor Comum de Polinômios ..... 200
8. Minimo Múltiplo Comum de Polinômios ..... 203
Exercícios ..... 204

**Capitulo 7. Frações**
1. Definições ..... 224
2 Transformações ..... 224
3. Operações ..... 228
4. Racionalização de Denominadores Irracionais ..... 240
5. Representação Decimal ..... 247
6. Decimais Exatos ..... 250
7. Dízimas Periódicas Simples ..... 250
8. Dízimas Periódicas Compostas ..... 252
Exercícios ..... 258

**Capitulo 8. Equações**
1. Identidades e Equações ..... 279
2. Principios Gerais Sobre a Transformação de Equações ..... 280
3. Equações do 1º Grau ..... 284
4. Equações do 2º Grau ..... 300
5. Equações Biquadradas ..... 311
6. Equações Modulares ..... 314
7. Equações Irracionais ..... 320
8. Sistema de Equações Não-Lineares ..... 326
Exercícios ..... 329

**Capítulo 9. Inequações**

1. Desigualdades e Inequações ..... 376
2. Operações ..... 377
3. Inequações do 1º Grau ..... 382
4. Sistema de Inequações do 1º Grau do uma incógnita ..... 385
5. Sistema de duas Inequações do 1º Grau com duas incógnitas ..... 387
6. Inequações do 2º Grau com uma incógnita ..... 387
7. Sistemas de Inequações do 2º Grau ..... 392
8. Inequações Envolvendo Funções Produto e Funções Racionais ..... 394
9. Inequações Simultâneas ..... 397
10. Inequações Modulares ..... 399
11. Inequações Irracionais ..... 403

Exercícios ..... 405

**Gabaritos** ..... 423

# POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

## 1.1. POTENCIAÇÃO

### 1.1.1. Potências com expoente inteiro positivo

**Definição:**

Seja A um número real ou expressão algébrica e n um inteiro positivo, a expressão $A^n$ representa o produto de n fatores iguais a A. Em linguajar matemático:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times ... \times A}_{n \text{ vezes}}.$$

O número expressão algébrica A é denominado de base da potência e n é o expoente.

**Exemplos:**

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$; $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

**1.1.1.2. Propriedades:**

1) Toda potência de um número positivo é positiva.

**Demonstração:**

Inicialmente devemos observar que a multiplicação de dois números positivos é positiva. Assim, a expressão $A^n$ representa a multiplicação de n fatores positivos, ou seja, é um número positivo.

2) Toda potência de um número negativo é positiva se o expoente for par e é negativa se o expoente for ímpar.

**Demonstração:**

Sabe-se que a multiplicação de dois números negativos é positiva e a multiplicação de um número positivo e outro negativo é negativa. Assim, a expressão $A^n$ para $A < 0$ representa a multiplicação de n números negativos. Assim, o sinal de $A^n$ depende da paridade de n. Assim, se n for par, podemos interpretar $A^n$ como a multiplicação de n/2 pares de números positivos, resultando, portanto, em um número positivo. Por outro lado, quando n for ímpar, quando tenta-se organizar todos os termos de $A^n$ aos pares, sempre sobra um termo negativo A, sendo no máximo possível organizar $(n-1)/2$ pares de termos A: $A^n = \underbrace{(A \times A) \times (A \times A) \times ... \times (A \times A)}_{(n-1)/2 \text{ termos}} \times A$.

Como $n - 1$ é par então a multiplicação dos $(n - 1)/2$ termos pares resulta em um número positivo que multiplicado por A fornece um número negativo.

3) Se A e B são números reais ou expressões algébricas e n é um número inteiro positivo: $(A.B)^n = A^n.B^n$

**Demonstração:**

Pela definição: $(A.B)^n = (A.B)(A.B)(A.B)...(AB) = (A.A.A...A)(B.B.B...B) = A^n.B^n$

**Obs:** Será demonstrado posteriormente que esta regra também é válida quando n for um número real.

**4)** Se A é um número real ou expressão algébrica e m e n são números inteiros positivos: $A^n.A^m = A^{n+m}$

**Demonstração:**

$$A^n.A^m = \underbrace{A.A.A...A}_{n}.\underbrace{A.A.A...A}_{m} = \underbrace{A.A.A...A}_{m+n} = A^{m+n}$$

**Obs:** Será demonstrado posteriormente que esta regra também é válida quando n e m forem números reais.

**5)** Se A é um número real ou expressão algébrica e n e m são números inteiros positivos: $(A^n)^m = A^{n.m} = (A^m)^n$

**Demonstração:**

$$(A^n)^m = \underbrace{A^n.A^n.A^n...A^n}_{m} = A^{\overbrace{n+n+n+...+n}^{m}} = A^{n.m}$$

$$(A^m)^n = \underbrace{A^m.A^m.A^m...A^m}_{n} = A^{\overbrace{m+m+m+...+m}^{n}} = A^{n.m}$$

**Obs:** Será demonstrado posteriormente que esta regra também é válida quando n e m forem números reais.

**6)** Se A e B são números reais ($B \neq 0$) ou expressões algébricas e n é um inteiro positivo: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$.

**Demonstração:**

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A}{B}.\frac{A}{B}.\frac{A}{B}...\frac{A}{B} = \frac{\overbrace{A.A.A...A}^{n}}{\underbrace{B.B.B...B}_{n}} = \frac{A^n}{B^n}$$

**Obs:** Será demonstrado posteriormente que esta regra também é válida quando n e m forem números reais.

**7)** Se A é um número real não nulo ou expressão algébrica e n e m são números inteiros positivos: $\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$.

**Demonstração:**

Observe que $A^m.A^{n-m} = A^{m+(n-m)} = A^n$ e desde que $A \neq 0$ então passando $A^m$ dividindo o outro lado da igualdade encontramos $\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$.

**Obs:** Será demonstrado posteriormente que esta regra também é válida quando n e m forem números reais.

### 1.1.2. Potências com expoente nulo

Se A é um número real não nulo ou expressão algébrica, pela propriedade anterior pode-se fazer:

$$1 = \frac{A^n}{A^n} = A^{n-n} = A^0 \quad \Rightarrow \quad A^0 = 1$$

Assim, conclui-se que todo número real não nulo elevado a zero tem como resultado o número 1.

### 1.1.3. Potências com expoente inteiro negativo

Sendo A um número real não nulo ou expressão algébrica e n um inteiro positivo:

$$A^{-n} = A^{0-n} = \frac{A^0}{A^n} = \frac{1}{A^n} \quad \Rightarrow \quad A^{-n} = \frac{1}{A^n}$$

Quando n = 1 tem-se uma conhecida função matemática, que denomina-se inverso ou recíproco de um número real: $A^{-1} = \frac{1}{A}$.

**Obs:** Será demonstrado posteriormente que esta regra também é válida quando n for um número real.

#### 1.1.3.1. Propriedades

**1)** Se A e B são números reais ou expressões algébricas e n é um número inteiro positivo: $(A.B)^{-n} = A^{-n}.B^{-n}$

**Demonstração:**

$$(A.B)^{-n} = \frac{1}{(A.B)^n} = \frac{1}{A^n}.\frac{1}{B^n} = A^{-n}.B^{-n}$$

**2)** Se A é um número real ou expressão algébrica e m e n são números inteiros positivos: $A^{-n}.A^{-m} = A^{-n-m}$

**Demonstração:**

$$A^{-n}.A^{-m} = \frac{1}{A^n}.\frac{1}{A^m} = \frac{1}{A^{n+m}} = A^{-(n+m)} = A^{-n-m}$$

**3)** Se A é um número real ou expressão algébrica e n e m são números inteiros positivos: $(A^{-n})^{-m} = A^{n.m} = (A^{-m})^{-n}$

**Demonstração:**

$$(A^{-n})^{m} = \left(\frac{1}{A^{n}}\right)^{-m} = (A^{n})^{m} = A^{n\,m}$$

$$(A^{-m})^{n} = \left(\frac{1}{A^{m}}\right)^{-n} = (A^{m})^{n} = A^{n\,m}$$

**4)** Se A e B são números reais ($B \neq 0$) ou expressão algébrica e n é um inteiro positivo: $\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \frac{A^{-n}}{B^{-n}}$

**Demonstração:**

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^{n} = \frac{B^{n}}{A^{n}} = \frac{1}{A^{n}}.B^{n} = A^{-n}.\frac{1}{B^{-n}} = \frac{A^{-n}}{B^{-n}}$$

**5)** Se A é um número real não nulo ou expressão algébrica e n e m são números inteiros positivos: $\frac{A^{-n}}{A^{-m}} = A^{-n+m}$

**Demonstração:**

$$\frac{A^{-n}}{A^{-m}} = \frac{A^{m}}{A^{n}} = A^{m-n} = A^{-n+m}$$

## Exercícios Resolvidos

**Exemplos:**

**1)** (Colégio Naval-86) Sendo $x^2 = 343$, $y^3 = 49^2$ e $z^6 = 7^5$, o algarismo das unidades simples do resultado de $\left(\frac{xy}{z}\right)^{24}$ é

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

**Solução: Alternativa A**

Inicialmente observe que: $x^2 = 343 = 7^3$, $y^3 = 49^2 = (7^2)^2 = 7^4$

Desenvolvendo obtemos:

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^{24} = \frac{x^{24}y^{24}}{z^{24}} = \frac{(x^2)^{12}(y^3)^8}{(z^6)^4} = \frac{(7^3)^{12}(7^4)^8}{(7^5)^4} = \frac{7^{36}.7^{32}}{7^{20}} = \frac{7^{36+32}}{7^{20}} = \frac{7^{68}}{7^{20}} = 7^{68-20} = 7^{48}$$

Note agora que $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, ...

Assim: $7^{4k} = (7^4)^k = (2401)^k$

Como toda potência de um número que termine em 1 também vai terminar em 1, então todo número da forma $7^{4k}$ termina em 1.

**2)** (EPCAr-01) O valor da expressão

$$10^{\frac{n}{2}}\left(10^{m-1}+10^{m+1}\right):\left[10^{m}\left(10^{\frac{n}{2}}+10^{\frac{n}{2}+2}\right)\right]$$

é

a) 10 b) 1 c) $10^{-1}$ d) $10^{m-\frac{n}{2}-2}$

**Solução: Alternativa C**

$$\frac{10^{\frac{n}{2}}\left(10^{m-1}+10^{m+1}\right)}{10^{m}\left(10^{\frac{n}{2}}+10^{\frac{n}{2}+2}\right)}=\frac{10^{\frac{n}{2}-m}\left(10^{m-1}+10^{2}.10^{m-1}\right)}{10^{\frac{n}{2}}+10^{2}.10^{\frac{n}{2}}}=\frac{10^{\frac{n}{2}-m}\left(101.10^{m-1}\right)}{101.10^{\frac{n}{2}}}=10^{\frac{n}{2}-m}.10^{m-1+\frac{n}{2}}=$$

$$=10^{\frac{n}{2}-m+m-1-\frac{n}{2}}=10^{-1}$$

**3)** (OBM-03) O valor da soma $\frac{2^{2003}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}+\frac{2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}$ é:

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

**Solução: Alternativa C**

$$\frac{2^{2003}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}+\frac{2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}=\frac{2^{2003}}{(2^2)^{1001}}\cdot\frac{(3^2)^{1001}}{3^{2003}}+\frac{2^{2002}}{(2^2)^{1001}}\cdot\frac{(3^2)^{1001}}{3^{2003}}=\frac{2^{2003}}{2^{2002}}\cdot\frac{3^{2002}}{3^{2003}}+\frac{2^{2002}}{2^{2002}}\cdot\frac{3^{2002}}{3^{2003}}=$$

$$=2^{2003-2002}.3^{2002-2003}+2^{2002-2002}.3^{2002-2003}=2.3^{-1}+2^{0}.3^{-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

**4)** (FGV-04) Os números inteiros x e y satisfazem a equação $2^{x+3}+2^{x+1}=5^{y+3}+3.5^{y}$. Então x – y é:

a) 8 b) 5 c) 9 d) 6 e) 7

**Solução: Alternativa B**

Utilizando as propriedades da potenciação: $2^{x+3}+2^{x+1}=5^{y+3}+3.5^{y} \Rightarrow$

$$2^{x+1}(2^2+1)=5^{y}(5^3+3) \Rightarrow 2^{x+1}.5=5^{y}.2^7 \Rightarrow \frac{2^{x+1}}{2^7}=\frac{5^{y}}{5} \Rightarrow 2^{x-6}=5^{y-1}$$

Desde que x e y são inteiros, a única possibilidade é $2^{x-6}=1$ e $5^{y-1}=1$:

i) $x-6=0 \Rightarrow x=6$; ii) $y-1=0 \Rightarrow y=1$;

Desta forma, tem-se que $x-y=6-1=5$.

**5)** (ESPM-03) A expressão numérica $(-2)^{3^2}.(-2)^{2^3}.(-2^2)^3.(-2^3)^2$ equivale a:

a) $2^{29}$ b) $-2^{29}$ c) $2^{24}$ d) $-2^{24}$ e) $2^{26}$

**Solução: Alternativa A**

$(-2)^{3^2}.(-2)^{2^3}.(-2^2)^3.(-2^3)^2 = (-2)^9.(-2)^8.(-2^6)(-2^6) = (-2^9).(2^8).(-2)^6.(2^6) = 2^{9+8+6+6} = 2^{29}$

**6)** (PUC/MG-04) O resultado da expressão $\dfrac{\left[2^9 : (2.2^2)^3\right]^{-3}}{2}$ é:

a) 1/5 b) 1/4 c) 1/3 d) 1/2

**Solução: Alternativa D**

$$\frac{\left[2^9 : (2.2^2)^3\right]^{-3}}{2} = \frac{\left[\dfrac{2^9}{(2^3)^3}\right]^{-3}}{2} = \frac{\left[\dfrac{2^9}{2^9}\right]^{-3}}{2} = \frac{(1)^{-3}}{2} = \frac{1}{2}$$

**7)** (OBM-10) Dividindo-se o número $4^{4^2}$ por $4^4$ obtemos o número:

A) 2 B) $4^3$ C) $4^4$ D) $4^8$ E) $4^{12}$

**Solução: Alternativa E**

$$\frac{4^{4^2}}{4^4} = \frac{4^{16}}{4^4} = 4^{16-4} = 4^{12}$$

**8)** (Olimpíada Canguru-01) O valor de $(0,25)^{1000}.2^{2001}$ é igual a:

A) 2 B) 4 C) $2^{4000}$ D) $4^{2000}$ E) outra resposta

**Solução: Alternativa A**

$$(0,25)^{1000}.2^{2001} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1000}.2^{2001} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{1000}.2^{2001} = \frac{1}{2^{2\,1000}}.2^{2001} = \frac{2^{2001}}{2^{2000}} = 2^{2001-2000} = 2$$

**9)** (Olimpíada do Rio Grande do Sul-01) O valor de $2^3.3^2.2^2.3^3$ é igual a:

A) $5^5$ B) $5^6$ C) $6^5$ D) $6^6$ E) $36^{10}$

**Solução: Alternativa A**

$2^3.3^2.2^2.3^3 = (2^3.2^2)(3^2.3^3) = 2^{2+3}.3^{2+3} = 2^5.3^5 = (2.3)^5 = 6^5$

**10)** (OBMEP-09) Qual é a soma dos algarismos do número que se obtém ao calcular $2^{100} \times 5^{103}$ ?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 12 E) 13

**Solução: Alternativa B**

$2^{100}.5^{103} = 2^{100}.5^3.5^{100} = 5^3(2^{100}.5^{100}) = 125(2.5)^{100} = 125.10^{100} = 125\underbrace{000...00}_{100}$

Assim, a soma dos algarismos é igual a $1 + 2 + 5 + 0 + 0 + 0 + ... + 0 + 0 = 8$

## 1.2. RADICIAÇÃO

**Definição:** Sendo n é um número inteiro positivo maior ou igual a 2, raiz de ordem n de um número real ou de uma expressão algébrica A é o número ou expressão algébrica que elevada à potência n tem como valor A. Simbolicamente a raiz de ordem n de A é representada por $\sqrt[n]{A}$.

Por exemplo, uma vez que $81 = 3^4$ então $\sqrt[4]{81} = 3$. Do mesmo modo, desde que $512 = 2^9$ então pode-se afirmar que $\sqrt[9]{512} = 2$.

Algumas raízes possuem nomes específicos:

1) quando n = 2 não se escreve a ordem na expressão da raiz, escrevendo-se simplesmente $\sqrt{A}$ e denominando de raiz quadrada de A.

2) quando n = 3 denomina-se $\sqrt[3]{A}$ de raiz cúbica de A.

3) quando n > 3 utiliza-se o numeral de n para denominar cada raiz. Assim, $\sqrt[4]{A}$ é chamada de raiz quarta de A, $\sqrt[5]{A}$ é chamada de raiz quinta de A, $\sqrt[6]{A}$ é chamada de raiz sexta de A, assim por diante.

### 1.2.1. Propriedades:

1) A raiz de ordem n de um número real positivo sempre é positiva.

**Demonstração:**

Se $\sqrt[n]{A} = x$ então $x^n = A$. Uma vez que $A > 0$ então necessariamente $x > 0$.

2) A raiz de ordem ímpar de um número real negativo sempre é negativa.

**Demonstração:**

Se $\sqrt[n]{A} = x$ então $x^n = A$. Como $A < 0$ e n é ímpar então necessariamente x é negativo.

3) Não existe, no campo dos números reais, a raiz de ordem par de um número real negativo.

**Demonstração:**

Suponhamos que exista um número real x de modo que $\sqrt[n]{A} = x$, ou seja, $x^n = A$. Observe agora que se n é par, não importando o sinal de x, sempre $x^n$ será um número positivo. Como $A < 0$, temos uma contradição.

4) A potência de n e a raiz de n são operações matemáticas inversas. Assim, pode-se afirmar que $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$.

**Demonstração:**

Pela definição de raiz de ordem n, se $\sqrt[n]{A} = x$ então $x^n = A$, ou seja, $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$.

**5)** Seja x e y números reais de mesmo sinal e n um inteiro positivo. Se $x^n = y^n$ então $x = y$.

**Demonstração:**

Se x e y são números reais de mesmo sinal: $x^n = A \Rightarrow x = \sqrt[n]{A}$;

$y^n = A \Rightarrow y = \sqrt[n]{A}$

Assim, conclui-se que $x = y$.

**Obs:** Note que se x e y forem números reais negativos, a propriedade acima somente é válida se n for um número inteiro ímpar.

**6)** Se A e B são números reais ou expressões algébricas e n é um número inteiro maior ou igual a 2: $\sqrt[n]{A.B} = \sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}$.

**Demonstração:**

Note que $\left(\sqrt[n]{A.B}\right)^n = A.B$ e que $\left(\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}\right)^n = \left(\sqrt[n]{A}\right)^n\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A.B$.

Como $\sqrt[n]{A.B}$ e $\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}$ possuem o mesmo sinal, pela propriedade 5 conclui-se que $\sqrt[n]{A.B} = \sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}$.

**7)** Se A e B são números reais ou expressões algébricas e n é um número inteiro maior ou igual a 2: $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$.

**Demonstração:**

Repare que $\left(\sqrt[n]{\frac{A}{B}}\right)^n = \frac{A}{B}$ e $\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{A}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{B}\right)^n} = \frac{A}{B}$. Logo, temos diretamente que $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$.

**Obs:** Caso $A/B < 0$ então a propriedade somente é válida se n for ímpar.

**8)** Se n e m são números inteiros e A é um número real: $\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$.

**Demonstração:**

Perceba que $\left(\sqrt[n]{A^m}\right)^n = A^m$ e que $(A^{\frac{m}{n}})^n = A^{\frac{m}{n}n} = A^m$.

**Obs1:** Caso $A < 0$ a propriedade acima é válida somente de m for par ou n for ímpar.

**Obs2:** A propriedade acima permite concluir uma expressão alternativa para a radiciação de números reais: $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$.

9) Se A e B são números reais e n é um número inteiro: $\sqrt[n]{A^n.B} = A\sqrt[n]{B}$.

**Demonstração:**

Elevando cada um dos membros da igualdade a n temos que: $\left(\sqrt[n]{A^n.B}\right)^n = A^n.B$ e $\left(A.\sqrt[n]{B}\right)^n = A^n.B$, de onde conclui-se a validade da tese.

10) Se n, m e k são números inteiros e A é um número real: $\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[k.n]{A^{k.m}}$.

**Demonstração:**

Pela propriedade anterior: $\sqrt[k.n]{A^{k.m}} = A^{\frac{k.m}{k.n}} = A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$.

11) Se n, m e p são números inteiros e A e B são números reais: $\sqrt[n]{A^m.B^k} = A^{\frac{m}{n}}.B^{\frac{k}{n}}$.

**Demonstração:**

Observe que $\left(\sqrt[n]{A^m.B^k}\right)^n = A^m.B^k$ e que $\left(A^{\frac{m}{n}}.B^{\frac{k}{n}}\right)^n = \left(A^{\frac{m}{n}}\right)^n\left(A^{\frac{k}{n}}\right)^n = A^m.A^k$.

12) Se A é um número real e m e n são números inteiros: $\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}$.

**Demonstração:**

Elevando cada um dos membros da igualdade a n temos que: $\left[\left(\sqrt[n]{A}\right)^m\right]^n = \left[\left(\sqrt[n]{A}\right)^n\right]^m = A^m$ e $\left(\sqrt[n]{A^m}\right)^n = A^m$, de onde conclui-se a validade da tese.

13) Se A é um número real e n e m são números inteiros: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[n.m]{A}$.

**Demonstração:**

Note que $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}\right)^{n.m} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}\right)^n\right]^m = \left(\sqrt[m]{A}\right)^m = A$ e que $\left(\sqrt[n.m]{A}\right)^{n.m} = A$, ou seja, a tese é verdadeira.

## 1.3. EXPOENTES FRACIONÁRIOS

Na verdade, já foram estudadas algumas propriedades relacionadas aos expoentes fracionários, uma vez que na radiciação tem-se que $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$. Agora serão estudadas as propriedades gerais de expoentes fracionários, mesmo quando o numerador não necessariamente vale 1.

### 1.3.1. Propriedades

**1)** Se A é um número real e n, p, r e s são números inteiros: $A^{\frac{n}{p}} . A^{\frac{r}{s}} = A^{\frac{n}{p} + \frac{r}{s}}$.

**Demonstração:**

$$A^{\frac{n}{p}} . A^{\frac{r}{s}} = \sqrt[p]{A^n} . \sqrt[s]{A^r} = \sqrt[ps]{A^{ns}} . \sqrt[ps]{A^{rp}} = \sqrt[ps]{A^{ns} . A^{rp}} = \sqrt[ps]{A^{ns+rp}} = A^{\frac{ns+rp}{ps}} = A^{\frac{n}{p} + \frac{r}{s}}.$$

**2)** Se A é um número real e n, p, r e s são números inteiros: $\frac{A^{\frac{n}{p}}}{A^{\frac{r}{s}}} = A^{\frac{n}{p} - \frac{r}{s}}$.

**Demonstração:**

$$\frac{A^{\frac{n}{p}}}{A^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[p]{A^n}}{\sqrt[s]{A^r}} = \sqrt[ps]{A^{ns}} . \sqrt[ps]{A^{-rp}} = \sqrt[ps]{A^{ns} . A^{-rp}} = \sqrt[ps]{A^{ns-rp}} = A^{\frac{ns-rp}{ps}} = A^{\frac{n}{p} - \frac{r}{s}}$$

**3)** Se A é um número real e n, p, r e s são números inteiros: $\left( A^{\frac{n}{p}} \right)^{\frac{r}{s}} = A^{\frac{n}{p} \cdot \frac{r}{s}}$.

**Demonstração:**

$$\left( A^{\frac{n}{p}} \right)^{\frac{r}{s}} = \left( \sqrt[p]{A^n} \right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left( \sqrt[p]{A^n} \right)^r} = \sqrt[ps]{A^{nr}} = A^{\frac{nr}{ps}} = A^{\frac{n}{p} \cdot \frac{r}{s}}$$

**4)** Se A é um número real e n, p e r são números inteiros: $\sqrt[p]{A^{\frac{n}{r}}} = A^{\frac{n}{p.r}}$.

**Demonstração:**

$$\sqrt[p]{A^{\frac{n}{r}}} = \sqrt[p]{\sqrt[r]{A^n}} = \sqrt[pr]{A^n} = A^{\frac{n}{pr}}$$

## Exercícios Resolvidos

**1)** (EPCAr-02) A diferença $8^{0,666} - 9^{0,5}$ é igual a

a) $-2$ b) $\sqrt{2}-3$ c) $-2\sqrt{2}$ d) 1

**Solução: Alternativa D**

Desenvolvendo obtém-se: $8^{0,666} - 9^{0,5} = 8^{2/3} - 9^{1/2} = \sqrt[3]{8^2} - \sqrt{9} = \sqrt[3]{64} - 3 = 4 - 3 = 1$

**2)** (UFRR-08) O valor da expressão $(256)^{-\frac{3}{4}}$ é:

a) $-\sqrt[4]{(256)^3}$ b) 64 c) $-\sqrt[4]{(256)^3}$ d) $-\frac{1}{64}$ e) $\frac{1}{64}$

**Solução: Alternativa E**

$$(256)^{-\frac{3}{4}} = (2^8)^{-\frac{3}{4}} = 2^{8\left(-\frac{3}{4}\right)} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

**3)** (UFLA-04) O produto $\sqrt[3]{a^2}.\sqrt{a}.\sqrt[6]{a}$, no qual $a > 0$, pode ser simplificado como

a) a b) $a\sqrt{a}$ c) $a\sqrt[3]{a}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$ e) $\sqrt{a}$

**Solução: Alternativa C**

$$\sqrt[3]{a^2}.\sqrt{a}.\sqrt[6]{a} = a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = a^{\frac{4+3+1}{6}} = a^{\frac{8}{6}} = a^{\frac{4}{3}} = a.a^{\frac{1}{3}} = a\sqrt[3]{a}$$

**4)** (Colégio Naval-00) Sabendo que $\sqrt[3]{x^2} = 1999^6$, $\sqrt{y} = 1999^4$ e $\sqrt[5]{z^4} = 1999^8$, ($x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$), o valor de $(x \cdot y \cdot z)^{-\frac{1}{3}}$ é:

(A) $1999^9$ (B) $1999^6$ (C) $1999^{\frac{1}{9}}$ (D) $1999^{-6}$ (E) $1999^{-9}$

**Solução: Alternativa E**

$$\sqrt[3]{x^2} = 1999^6 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 1999^6 \Rightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1999^6\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 1999^9$$

$$\sqrt{y} = 1999^4 \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = 1999^4 \Rightarrow \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (1999^4)^2 \Rightarrow y = 1999^8$$

$$\sqrt[5]{z^4} = 1999^8 \Rightarrow x^{\frac{4}{5}} = 1999^8 \Rightarrow \left(x^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{4}} = \left(1999^8\right)^{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = 1999^{10}$$

$$(x.y.z)^{-\frac{1}{3}} = \left(1999^9.1999^8.1999^{10}\right) = \left(1999^{9+8+10}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(1999^{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1999^{27\left(-\frac{1}{3}\right)} = 1999^{-9}$$

**5)** (Unicamp-93) Dados os dois números positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

**Solução:**

A melhor maneira de comparar os dois números é escrevê-los de uma forma que estejam elevados à mesma potência.

$\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = [(3^4)^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}} = 81^{\frac{1}{12}}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = [(4^3)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{4}} = 64^{\frac{1}{12}}$

Assim, como $81 > 64$, conclui-se que $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.

**6)** (EPCAr-04) O valor da expressão $\left[\dfrac{\left(6,25\text{x}10^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(6,4\text{x}10^{-2}\right)^{-\frac{1}{3}}}\right]^{-\frac{1}{2}}$ é

a) $\sqrt{5}$ $\qquad$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ c) $\sqrt{3}$ $\qquad$ d) $\sqrt{7}$

**Solução: Alternativa A**

$$\left[\frac{(6,25.10^{-2})^{\frac{1}{4}}}{(6,4.10^{-2})^{-\frac{1}{3}}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{(625.10^{-4})^{\frac{1}{4}}}{(64.10^{-2})^{-\frac{1}{3}}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{(5^4)^{\frac{1}{4}}(10^{-4})^{\frac{1}{4}}}{(4^3)^{-\frac{1}{3}}(10^{-2})^{-\frac{1}{3}}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{5.10^{-1}}{4^{-1}.10}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[5.4.10^{-1-1}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= [20.10^{-2}]^{-\frac{1}{2}} = 20^{-\frac{1}{2}}.10 = (2^2)^{-\frac{1}{2}}(5)^{-\frac{1}{2}}.10 = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

**7)** (Colégio Naval-64) Dê a expressão mais simples de $\dfrac{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} : \sqrt[8]{a}}{\dfrac{\sqrt[3]{a}.\sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}}$.

**Solução:**

$$\frac{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} : \sqrt[8]{a}}{\dfrac{\sqrt[3]{a}.\sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{\dfrac{a^{1/4}}{a^{1/6}} \cdot \dfrac{1}{a^{1/8}}}{\dfrac{a^{1/3}}{a^{1/2}}.a^{1/9}} = \frac{a^{1/4-1/6-1/8}}{a^{1/3-1/2+1/9}} = \frac{a^{-1/24}}{a^{-1/18}} = a^{-1/24+1/18} = a^{1/72} = \sqrt[72]{a}$$

**8)** (UECE-02) A expressão numérica $5\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16}$ é igual a:

A) $\sqrt[3]{1458}$ $\qquad$ B) $\sqrt[3]{729}$ $\qquad$ C) $2\sqrt[3]{70}$ $\qquad$ D) $2\sqrt[3]{38}$

**Solução: Alternativa A**

Sabendo-se que $54 = 2.3^3$ e $16 = 2^4$:

$$5\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} = 5\sqrt[3]{2.3^3} - 3\sqrt[3]{2^3.2} = 5\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3^3} - 3\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2} = 15\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{9^3.2} = \sqrt[3]{1458}$$

## 1.4. EXPOENTES REAIS

No volume 1 desta coleção, mais especificamente no tópico 1.10.5 há um texto sobre a densidade dos números racionais e irracionais nos números reais. A leitura deste tópico é interessante para o entendimento do que vai ser explanado em seguida.

Observe que as propriedades da potenciação e da radiciação foram demonstradas inicialmente para os números inteiros positivos, posteriormente para os números inteiros negativos e finalmente foram demonstradas para os números racionais. Entretanto, para fins de estender as propriedades já demonstradas para os números reais, os números irracionais podem ser entendidos como números racionais cujo período é formado por infinitos algarismos. Assim, todas as propriedades já demonstradas também são válidas para os números irracionais. Uma vez que os números reais nada mais são a união dos números racionais com os irracionais, as seguintes propriedades listadas abaixo são válidas para números reais A, B, x e y:

1) $(A.B)^x = A^x.B^y$ 2) $A^x.A^y = A^{x+y}$ 3) $(A^x)^y = A^{x.y}$

4) $\left(\frac{A}{B}\right)^x = \frac{A^x}{B^x}$ 5) $\frac{A^x}{A^y} = A^{x-y}$ 6) $A^{-x} = \frac{1}{A^x}$

## Exercícios Resolvidos

**1)** (EPCAr-09) Marque a alternativa verdadeira.

a) Se $x = \sqrt[p]{\frac{20}{4^{p+2} + 4^{p+1}}}$, $p \in \mathbb{N}^*$, então $x \in [\mathbb{R} - \mathbb{Q}]$

b) O valor de $y = \frac{\left(\frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{3^{30}}\right)}{\left(\frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{3^{40}}\right)}$ é tal que $y \in (\mathbb{Q} - Z)$

c) Se $z = \frac{\sqrt{\sqrt{81}} - 10^2.\sqrt{625.10^{-4}}}{(-\sqrt[4]{3})^2 - \sqrt{27}}$, então $z \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

d) Se $m = 1,\overline{1} - \left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{2}-1}$, então $m < -1$

**Solução: Alternativa C**

a) FALSA. $x = \sqrt[p]{\frac{20}{4^p(4^2+4)}} = \sqrt[p]{\frac{1}{4^p}} = \left(4^{-p}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{4} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

b) FALSA. $y = \dfrac{\dfrac{3^{20}+3^{10}+1}{3^{30}}}{\dfrac{3^{20}+3^{10}+1}{3^{40}}} = \dfrac{3^{40}}{3^{30}} = 3^{10} \Rightarrow x \in Z$

c) VERDADEIRA. $z = \dfrac{\sqrt[4]{3^4} - 10^2\sqrt{25^2.10^{-4}}}{(-1)^2\sqrt[4]{3^2} - 3\sqrt{3}} = \dfrac{3-10^2.5.10^{-2}}{\sqrt{3}-3\sqrt{3}} = \dfrac{3-5}{-2\sqrt{3}} = \dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\in (IR - Q)$

d) FALSA. $m = 1,111... - (2)^{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{10}{9} - 2^{2-1} = \dfrac{10}{9} - 2 = \dfrac{10-18}{9} = -\dfrac{8}{9} > -1$

**2)** Demonstre que existe um número irracional que elevado a um número irracional dá como resultado um número racional.

**Solução:**

Considere o número $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Uma vez que $\sqrt{2}$ é um número irracional, se x for um número racional, está provado que existe um número irracional que elevado a outro irracional produz um número racional.

Por outro lado, se x for um número irracional, segue que

$$x^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

é um número racional. Ou seja, x (que supomos ser irracional) elevado a $\sqrt{2}$ dá como resultado um número racional.

## 1.5. MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO PARA EXTRAÇÃO DA RAIZ QUADRADA

Neste tópico serão apresentados dois métodos para calcular o valor aproximado da raiz quadrada de um número natural. Estes dois métodos utilizam apenas as quatro operações fundamentais.

Sabe-se que a raiz quadrada de um número natural n pode resultar em um número inteiro, caso n seja quadrado perfeito, ou em um número irracional, caso n não seja um quadrado perfeito. Uma vez que a intenção é determinar um valor aproximado para a raiz quadrada, os dois métodos serão exemplificados para os casos em que a raiz é irracional.

### 1.5.1. Método da Fração Contínua

Este método se baseia em determinar uma sequência de frações que se aproximam do valor da raiz quadrada de um número natural. A aplicação do método será apresentada no cálculo da raiz quadrada do número 24:

1) Inicialmente sabe-se que $4^2 < 24 < 5^2$, fazendo com que $4 < \sqrt{24} < 5$.

Assim, $\sqrt{24} = 4 + h$, onde $0 < h < 1$. Fazendo $h = \frac{1}{x}$, tem-se que $\sqrt{24} = 4 + \frac{1}{x}$, onde $x > 1$.

2) $\frac{1}{x} = \sqrt{24} - 4 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{24} - 4} = \frac{\sqrt{24} + 4}{8} \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow$

$x = 1 + \frac{1}{y}$, com $y > 1$.

3) $\frac{1}{y} = x - 1 = \frac{\sqrt{24} - 4}{8} \Rightarrow y = \sqrt{24} + 4 \Rightarrow 8 < y < 9 \Rightarrow y = 8 + \frac{1}{z}$

4) $\frac{1}{z} = y - 8 = \sqrt{24} - 4 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{24} - 4} = x$

5) Observe os resultados já encontrados:

$$\sqrt{24} = 4 + \frac{1}{x}, \quad x = 1 + \frac{1}{y}, \quad y = 8 + \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad z = x$$

Uma vez que z = x então pode-se criar um processo periódico para a determinação das frações que vão ser usadas para a aproximação de $\sqrt{24}$:

$$4 = 4 \quad 4 + \frac{1}{1} = 5 \quad 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}} = 4{,}8889 \quad 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1}}} = 4{,}9 \quad 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}}}} = 4{,}8989 \quad \ldots$$

Quanto mais processos são realizados mais o valor da fração encontrada se aproxima de $\sqrt{24}$. Logo, quando este processo tende a possuir infinitos passos, o valor da fração vai ser igual ao valor exato da raiz quadrada de 24. Assim, pode-se afirmar que:

$$\sqrt{24} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

**Observações:**

1) À medida que aumentamos o número de processos as frações obtidas são cada vez mais próximas de $\sqrt{n}$. Entretanto, não é necessário fazer este processo ser muito extenso, pois as primeiras frações já determinam boas aproximações. No exemplo dado, a 4ª fração obtida, 4,8989, já é razoavelmente próxima de $\sqrt{24} \cong 4{,}89897948557...$

2) Perceba que os números obtidos na aproximação são inteiros positivos entre 1 e $\sqrt{n} + n$. Como entre 1 e $\sqrt{n} + n$ existe uma quantidade finita de números inteiros, então o processo é necessariamente cíclico.

### 1.5.2. Método da Sequência Recorrente

O método da sequência recorrente também utiliza apenas as quatro operações para determinar uma boa aproximação da raiz quadrada de um número inteiro n. Este método possui duas grandes vantagens em relação ao método da fração contínua: as operações a serem realizadas são mais simples e os valores encontrados convergem mais rapidamente para uma boa aproximação da raiz quadrada.

O método é baseado em dois passos, sendo o segundo interativo:

1) Escolhe-se $a_0 > 0$ tal que $a_0^2 \geq n$;

2) Calcula-se $a_k = \frac{1}{2}\left(a_{k-1} + \frac{n}{a_{k-1}}\right)$ para k = 1, 2, 3, ...

Dependendo do valor que se escolhe para $a_0$ os valores encontrados para $a_1$, $a_2$, ... convergem mais ou menos rapidamente para $\sqrt{n}$. É sempre interessante escolher para $a_0$ o menor inteiro que seja maior que a raiz quadrada de n.

A aplicação do método será apresentada para o mesmo valor que exemplificou o método da fração contínua. Assim, as convergências dos dois métodos poderão ser comparadas. Logo, aplicar-se-á o método para calcular um valor aproximado para $\sqrt{24}$. Como o menor inteiro que é maior que raiz quadrada de 24 é 5, deve-se fazer $a_0 = 5$. Assim:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{24}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{24}{5}\right) = 4{,}9$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{24}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(4{,}9 + \frac{24}{4{,}9}\right) = 4.89897959...$$

Perceba que o segundo número calculado pelo processo interativo já se aproxima bastante do valor de $\sqrt{24}$. O erro percentual do valor determinado para $a_2$ em relação ao valor exato de $\sqrt{24}$ ($\sqrt{24} \cong 4{,}89897948557...$) é de apenas 0,000002%.

O exemplo acima mostra que o método da sequência recorrente obtém boas aproximações para a $\sqrt{n}$ de maneira mais rápida que o método da fração contínua. Observe os exemplos abaixo para entender melhor a aplicação dos métodos.

## Exercícios Resolvidos

**1)** Aplique o método das frações contínuas e o método da sequência recorrente para apresentar uma aproximação para $\sqrt{2}$ e compare a convergência dos dois métodos.

**Solução:**

i) Método da fração contínua:

Uma vez que $1^2 < 2 < 2^2$, então $1 < \sqrt{2} < 2$.

Assim, $\sqrt{2} = 1 + h$, onde $0 < h < 1$.

Fazendo $h = \frac{1}{x}$, tem-se que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$, onde $x > 1$.

$$\frac{1}{x} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow 2 < x < 3 \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{y}, \text{ com } y > 1.$$

$$\frac{1}{y} = x - 2 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow y = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow 2 < y < 3 \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{z}$$

Assim, pode-se fazer $y = x$, fazendo com as frações que se aproximam de $\sqrt{2}$ são:

i) $1+\frac{1}{2}=1,5 \qquad 1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}=1,4 \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}=1,41666...$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=1,413793... \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}=1,41428571428...$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}}=1,41420118343...$$

ii) Método da sequência recorrente:

Como o menor inteiro maior que $\sqrt{2}$ é 2, então faz-se $a_0 = 2$

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a_0+\frac{2}{a_0}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2}\right)=1,5$$

$$a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{2}{a_1}\right)=\frac{1}{2}\left(1,5+\frac{2}{1,5}\right)=1,41666...$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{2}{a_2}\right)=\frac{1}{2}\left(1,41666...+\frac{2}{1,41666...}\right)=1,41421568628...$$

Sabendo-se que $\sqrt{2}\cong 1,41421356237...$, pode-se notar que somente o sexto número obtido pelo método da fração contínua possui um erro percentual de aproximadamente 0,000875% em relação ao valor exato de $\sqrt{2}$, enquanto que pelo método da sequência recorrente o terceiro número obtido apresenta um erro percentual de aproximadamente 0,00015% em relação ao valor exato de $\sqrt{2}$.

Mais uma vez pode-se constatar que o método da sequência recorrente produz números que se aproximam mais rapidamente do valor exato de $\sqrt{2}$.

**2)** (Colégio Naval-87) O número $\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt{16}}$ está situado entre

a) 1 e 1,5 b) 1,5 e 2 c) 2 e 2,5 d) 2,5 e 3 e) 3,5 e 4

**Solução: Alternativa C**

Uma vez que $1 < 4 < 8$, então $1 < 4 < 2^3$ e aí conclui-se que $1 < \sqrt[3]{4} < 2$ (1)

Da mesma forma: $8 < 16 < 27 \Rightarrow 2^3 < 16 < 3^3 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{16} < 3$ (2)

Somando lado a lado encontra-se que: $4 < 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 6$.

Finalmente: $\sqrt{4} < \sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} < \sqrt{6} \Rightarrow 2 < \sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} < \sqrt{6}$

Utilizando o método da sequência recorrente para determinar uma aproximação para $\sqrt{6}$, inicialmente nota-se que o menor inteiro maior que $\sqrt{6}$ é 3, então faz-se $a_0 = 3$.

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{6}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{6}{3}\right) = 2,5$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{6}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2,5 + \frac{6}{2,5}\right) = 2,45$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{6}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(2,45 + \frac{6}{2,45}\right) = 2,449489...$$

Assim, conclui-se que $\sqrt{6} \cong 2,4495$, fazendo com que $2 < \sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} < 2,5$.

# Exercícios propostos

1) (Unimontes-15) Se $2^x = a$ e $2^y = b$, com $x, y \in IR$, então o valor de $(0,25)^{-3x+y}$ é igual a

a) $\frac{b^2}{a^6}$ b) $\frac{1}{a^6b^2}$ c) $\frac{a^6}{b^2}$ d) $\sqrt{a^6b^2}$

2) (Unimontes-05) Se a e b são números reais positivos, m e n são números naturais não nulos, então, das afirmações abaixo, a única INCORRETA é

a) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ b) $\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b} = \sqrt[m+n]{a+b}$

c) $(a^m)^n.(b^n)^m = (ab)^{mn}$ d) $\left(\frac{a^m}{b^m}\right)^n = a^{mn}.b^{-mn}$

3) (Unaerp-13) O valor de $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ é

a) 1/2 b) – 1/2 c) – 2 d) 3/8 e) não é um número real

4) (OBM-99) A metade do número $2^{11} + 4^8$ é igual a:

A) $2^5 + 4^4$ B) $2^5 + 2^8$ C) $1^{10} + 2^8$ D) $2^{15} + 4^5$ E) $2^9 + 4^7$

5) (OBM-99) O quociente de $50^{50}$ por $25^{25}$ é igual a:

A) $25^{25}$ B) $10^{25}$ C) $100^{25}$ D) $2^{25}$ E) $2 \times 25^{25}$

6) (Unimontes-03) Para encontrar o lado de um quadrado de área 36 cm$^2$, Zezinho recorreu à seguinte propriedade em IR: $\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a$, não se esquecendo de que essa propriedade tem certas restrições. Das restrições abaixo, é INCORRETO afirmar que,

A) se $a \geq 0$ e n é par, a propriedade é válida.

B) se $a < 0$ e n é par, a propriedade é válida.

C) se $a < 0$ e n é ímpar, a propriedade é válida.

D) se $a < 0$ e n é par, a propriedade não é válida.

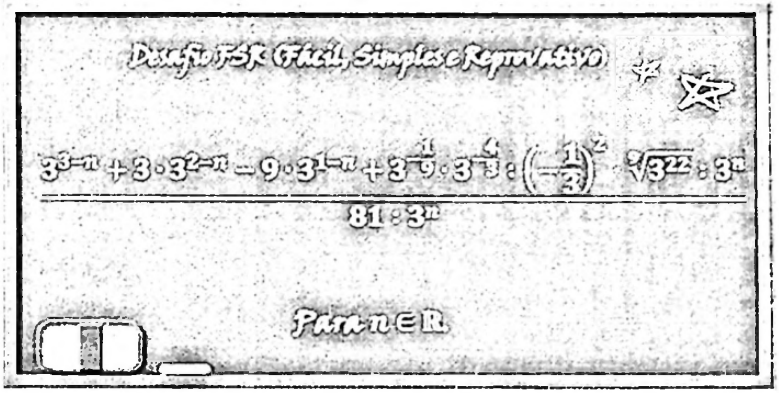
**7)** (OBM-02) A razão $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ é igual a:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 8

**8)** (UFLA-07) O valor de $10^{-2}[(-3)^2-(-2)^3]\div\sqrt[3]{-0,001}$ é

a) – 1,7 b) – 17 c) – 0,1 d) 1,7

**9)** (CM Manaus-18) O professor de Matemática Pardal resolveu lançar um desafio aos alunos do 8º ano do CMM, a fim de verificar se eles tinham entendido a aula que acabou de ministrar sobre propriedades de potência. Para isso, os alunos tinham que simplificar o máximo possível a seguinte expressão:




Observe, abaixo, alguns dos resultados que foram encontrados pelos alunos e assinale a única solução correta para tal problema:

a) 0 b) $\frac{2}{3}$ c) $3^{n-1}$ d) $6.3^{n-1}$ e) $3^{n-1}+3^{9^{\frac{27}{9}-n}}$

**10)** (Epcar-17) Analise as proposições abaixo e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA)

( ) Se $m=\frac{0,0001.(0,01)^2.1000}{0,001}$, então $m=\frac{1}{100}$

( ) O número $(0,899^2-0,101^2)$ é menor que $\frac{7}{10}$

( ) $\left(\sqrt{\left(2^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}-1}}\cdot\sqrt{4.\sqrt{\left(2^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}-1}}}\right)$ é irracional

A sequência correta é

a) V – F – F b) V – F – V c) F – F – F d) F – V – V

11) (UFC-07) Dentre as alternativas a seguir, marque aquela que contém o maior número.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5.6}}$ b) $\sqrt{6\sqrt[3]{5}}$ c) $\sqrt{5\sqrt[3]{6}}$ d) $\sqrt[3]{5\sqrt{6}}$ e) $\sqrt[3]{6\sqrt{5}}$

12) (UEPB-11) Efetuando

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2^{0,25}\right)^{-2}-\left(\frac{6}{6^{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{3}-1},$$

temos por resultado:

a) 17/36 b) – 71/2 c) 36/35 d) 1 e) – 1/2

13) (UEPB-10) Seja n > 1 um número natural. O valor da expressão $\sqrt[n]{\frac{72}{9^{2-n}-3^{2-2n}}}$ quando simplificada é:

a) $\sqrt[n]{9}$ b) $9^{2n}$ c) $9^n$ d) 9 e) 1

14) (Epcar-16) Sobre os números reais positivos a, b, c, d, p e q, considere as informações abaixo:

I) $(abc)^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{0,25}$ e $(abcd)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{10}$

II) $\sqrt[3]{p}=32$ e $\sqrt{q}=243$

O valor de $x=\frac{d}{(pq)^{\frac{1}{5}}}$ é um número

a) racional inteiro.
b) decimal periódico.
c) decimal exato menor que 1
d) decimal exato maior que 1

15) (EPCAr-10) Analise as expressões abaixo.

$$A=\sqrt[3]{\frac{(0,005)^2(0,000075)}{10}} \qquad B=-\left[\frac{(5.10^{-4})(2^{-1/3})}{3^{-1/3}}\right]$$

Marque a resposta correta.

a) $A+B>0$ b) $A.B=-1$ c) $\frac{A}{B}=-1$ d) $A^{-1}=B$

**16)** (EPCAr-00) Simplificando a expressão abaixo, obtém-se

$$\frac{\left(\sqrt[3]{31+\sqrt[3]{10-\sqrt{83-\sqrt{4}}}}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^{n}}}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2^{n}}}\right)^4} =$$

a) $(-2)^{-2}$ b) $-2^{-2}$ c) $-2^{2}$ d) $(-2)^{2}$

**17)** (Epcar-13) O oposto do número real $x = \frac{526}{495} \div \left[\frac{\left((-2)^{2\sqrt{2}-1}\right)^{2\sqrt{2}+1}}{128}\right]^{-1}$ está compreendido entre

a) –0,061 e –0,06 c) –0,063 e –0,062
b) –0,062 e –0,061 d) –0,064 e –0,063

**18)** (Unimontes-05) Se $a = -\sqrt[3]{-64}$ e $b = 16^{-\frac{1}{4}}$, então a única alternativa correta é

a) a + b = 9/2 b) a = b c) a : b = 2 d) a.b = 1/8

**19)** (Colégio Naval-16) Calcule o valor de $X = \left(\frac{\sqrt{1^{1256}} + 8943^{0} + \frac{3125}{5^{5}} + \sqrt[7]{1}}{1{,}5 - 2^{-1} + (-1)^{2058}}\right)^{\sqrt{\frac{3^{21}+3^{23}}{10}}}$

e assinale a opção correta.

a) $2^{16}$ b) $2^{20}$ c) $2^{24}$ d) $2^{26}$ e) $2^{27}$

**20)** (Unifor-03) Simplificando-se $\left(2^{-\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}}\right).\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)^{-1}.\sqrt[3]{36}$, obtém-se

a) $6^{-2/3}$ b) $2^{1/3} + 3^{1/3}$ c) $3^{1/3} - 2^{1/3}$ d) $5^{1/3}$ e) 6

**21)** (IFBA-16) Dadas as expressões numéricas $a = \frac{3^{-1} + 9^{0,5} + \sqrt[3]{\sqrt{27}}.\sqrt{3}}{12.(0,25 - 0,222...)}$ e $b = 0,8 \div 0,04$. É correto afirmar que o valor de b – a é igual a:

a) – 1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 21

**22)** (UERGS-08) O valor de x na igualdade $x = \sqrt[3]{-8} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + 81^{0,25}$ é igual a

a) 1 b) 3 c) 5 d) 8 e) 10

**23)** (CM Manaus-17) Maratona é o nome de uma corrida realizada na distância oficial de 42,195 km, normalmente em ruas e estradas. Única modalidade esportiva que se originou de uma lenda, seu nome foi instituído como uma homenagem à antiga lenda grega do soldado ateniense Fidípides, um mensageiro do exército de Atenas, que teria corrido cerca de 40 km entre o campo de batalha de Maratona até Atenas para anunciar aos cidadãos da cidade a vitória dos exércitos atenienses contra os persas e morreu de exaustão, após cumprir a missão.
Sabendo-se que em certa maratona o tempo gasto pelo 1°lugar foi de x horas, onde x é dado pela expressão $x = -\frac{3}{4} + \left[\frac{((-2)^{(3\sqrt{2}-4)})^{(3\sqrt{2}+4)}}{11}\right]^{-1}$, então podemos afirmar que:

A) $x^2 - 1$ é par
B) $x^3 + x$ é um número composto
C) $3^x - 2$ é um quadrado perfeito
D) x é um número irracional
E) $x - 5$ é um número natural divisível por 2017

**24)** (UESC-07) Considerando-se a expressão $M = \frac{2^{-2} + 0,25^{-2^{-1}} - 2^2}{-2^{-3}}$ pode-se afirmar que o valor de M é

a) -14 b) -2 c) 0,5 d) 2 e) 14

**25)** (UFLA-05) O valor da expressão $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \cdot \sqrt{2} - (16)^{0,5}}{\left[(\sqrt{2})^{0,5} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[\sqrt[4]{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]}$ é igual a

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 9 e) 1

**26)** (Colégio Naval-78) O valor de $\sqrt[3]{16\sqrt{8}} \cdot \sqrt[6]{0,125}$ é :

(A) $2\sqrt{8}$ (B) $4\sqrt[3]{4}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt[3]{2}$ (E) $4\sqrt[6]{2}$

**27)** (Colégio Naval-84) O valor de

$$\left[\left(\frac{1}{5^{-\frac{2}{3}}}\right)^{3}-\left(\frac{2^{12}}{2^{10}}\right)^{1/2}\right]-\left[\frac{(0{,}333\ldots)^{-5/2}}{\sqrt{3}}-\frac{(5^{5/3})^{2}}{\sqrt[3]{5}}\right]\text{, é:}$$

(A) 139 (B) 120 (C) 92 (D) 121 (E) 100

**28)** (Colégio Naval-93) A expressão

$$\frac{(0{,}5)^{-2}\cdot 2^{0{,}333\ldots}\cdot\sqrt[3]{16}}{(0{,}125)^{-3}}$$

escrita como potência de base 2, tem como expoente.

(A) $-\frac{14}{3}$ (B) $-\frac{16}{3}$ (C) $-6$ (D) $-\frac{22}{3}$ (E) $-8$

**29)** (EPCAr-02) Ao se resolver a expressão numérica

$$\left[\sqrt[3]{\frac{(25\ .\ 10^{-6})\ .\ 0{,}000075}{10}}\right]:\left[\frac{5\sqrt[3]{1.5}}{10^{4}}\right]\ .\ (-0{,}0010)^{0}$$

o valor encontrado é

a) $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c)1 d) 0,1

**30)** (EPCAr-02) O inverso de $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$, com $x > 0$ e $y > 0$, é igual a

a) $\frac{\sqrt[6]{xy^5}}{y}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{x}$ c) $\frac{\sqrt[6]{yx^5}}{x}$ d) $\frac{\sqrt[3]{xy^2}}{y}$

**31)** (IME-14) Sabe-se que

$$y.z.\sqrt{z\sqrt{x}} = x.y^3.z^2 = \frac{x}{z\sqrt{y.z}} = e,$$

em que e é a base dos logaritmos naturais. O valor de $x + y + z$ é

a) $e^3 + e^2 + 1$ b) $e^2 + e^{-1} + e$ c) $e^3 + 1$

d) $e^3 + e^{-2} + e$ e) $e^3 + e^{-2} + e^{-1}$

**32)** (Unaerp-14) O valor da expressão $\frac{(-8)^{\frac{1}{3}}2^3}{2^{-3}\sqrt[3]{-8}}$ é:

a) 64 b) $-64$ c) 8 d) $-8$ e) 32

**33)** (Colégio Naval-01) Considere as afirmativas abaixo:
(I) $2^{68} + 10^{68} = 2^{68} + (2.5)^{68} = 2^{68} + 2^{68}.5^{68} = 4^{68}.5^{68} = 20^{68}$.
(II) $2^{68} + 10^{68} = 2^{68} + (2.5)^{68} = 2^{68} + 2^{68}.5^{68} = 2^{136}.5^{68}$.
(III) $6^{17} + 10^{23} = (2.3)^{17} + (2.5)^{23} = 2^{17}.3^{17} + 2^{23}.5^{23} = (2^{17}.2^{23}) + (3^{17}.5^{23})$.
Pode-se afirmar que:
A) apenas a afirmativa I é verdadeira.
B) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
C) apenas a afirmativa II é verdadeira.
D) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
E) as afirmativas I, II e III são falsas.

**34)** (Colégio Naval-11) A expressão $\sqrt[3]{-(x-1)^6}$ é um número real. Dentre os números reais que essa expressão pode assumir, o maior deles é:
a) 2 b) $\sqrt{2}-1$ c) $2-\sqrt{2}$ d) 1 e) 0

**35)** (Colégio Naval-12) Sabendo que n é natural não-nulo, e que $x\#y = x^y$, qual é o valor de $(-1)^{n^4+n-1} + \left(\frac{2\#(2\#(2\#2))}{((2\#2)\#2)\#2}\right)$?
a) 127 b) 128 c) 255 d) 256 e) 511

**36)** (CM Belo Horizonte-16) As propriedades das operações com números racionais, envolvendo potências, servem para agilizar a resolução de exercícios e problemas. Assinale a operação realizada corretamente.

(A) $\frac{4}{9}.\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$.

(B) $\frac{8}{27}:\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^3:\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)$.

(C) $\left(\frac{8}{27}\right)^2 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$.

(D) $\frac{8}{27}.\frac{1}{125} = \left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}.\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{15}\right)^3$.

(E) $\frac{125}{8}:\frac{1}{27} = \left(\frac{5}{2}\right)^3:\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}.\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

**37)** (CM Belo Horizonte-16) Considerando a, b, c e d números reais e $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[d]{b^c}}{\sqrt[d]{a^c}}$, assinale a alternativa que apresenta um número racional.

a) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$ b) $\left(\frac{4}{49}\right)^{-\frac{2}{3}}$ c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}$

d) $(16)^{-\frac{1}{3}}$ e) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

**38)** (Colégio Naval-12) Para x = 2013, qual é o valor da expressão

$$(-1)^{6x} - (-1)^{x-3} + (-1)^{5x} - (-1)^{x-3} - (-1)^{4x} - (-1)^{2x}?$$

a) – 4 b) – 2 c) 0 d) 1 e) 4

**39)** (Colégio Naval-13) Sabendo que $A = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$, qual é o valor de $\frac{A^2}{\sqrt[6]{A^7}}$?

a) $\sqrt[5]{3^4}$ b) $\sqrt[7]{3^6}$ c) $\sqrt[8]{3^5}$ d) $\sqrt[10]{3^7}$ e) $\sqrt[12]{3^5}$

**40)** (Colégio Naval-14) Qual é o valor da expressão

$$\left[\left(3^{0,333\ldots}\right)^{27} + 2^{2^0} - \sqrt{239 + \sqrt[3]{\frac{448}{7}}} - \left(\sqrt[3]{3}\right)^3\right]^{2^{92}}?$$

a) 0,3 b) $\sqrt[3]{3}$ c) 1 d) 0 e) – 1

**41)** (CM Manaus-18) Calculando a expressão Matemática $\sqrt[3]{\frac{2^{32} + 2^{34}}{20}}$, podemos afirmar que o resultado:

(A) é um número ímpar.
(B) é um número primo.
(C) é um número múltiplo de 2046.
(D) é um número que possui 11 divisores positivos.
(E) é um número maior que 2000.

**42)** (Epcar-14) Considere os números p, q e r abaixo:

$$p = \frac{\sqrt{180} + 2\sqrt{20} - 2\sqrt{605}}{4\sqrt{80} - \sqrt{500}} \qquad q = \left[\left(9^{0,\overline{6}}\right)^{0,5}\right]^{-3} \qquad r = 0,\overline{18}.\left[\frac{\sqrt{0,25} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 225^{0,5}}\right]$$

Se x é o número obtido pelo produto entre p, q e r, então x é um número

a) irracional positivo.
b) irracional negativo.
c) racional negativo.
d) racional positivo.

**43)** Calcule o valor de $\left[\sqrt[\sqrt{3}]{\sqrt{3}}\sqrt{(3\sqrt{3})^{\sqrt[\sqrt{3}]{\sqrt{3}^{\sqrt{3}+1}}}}\right]^{\sqrt{3}}$.

**44)** Simplifique a expressão $\left(\frac{\sqrt{x^3\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}.x^2}{\sqrt[4]{x^5\sqrt[3]{x}}}\right)^{24}$.

**45)** Simplificar a expressão $\left\{\left[\frac{\left(a^{\frac{a+1}{a}} + a^{\frac{a-1}{a}}\right)^a}{a^{a-1}.\left(a^{\frac{2}{a}}+1\right)^a}\right]^{\frac{a}{a^2-1}} - 1\right\}^a$.

**46)** Calcule o valor de $A = \sqrt{2\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{16\sqrt{\ldots}}}}}$.

**47)** Simplificar a expressão $\frac{\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^4\sqrt{x^7}}}}{\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[5]{1}}{x^6}}}{\frac{x}{x^2}}}}$.

**48)** Calcular o valor de cada uma dessas expressões:

a) $A = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{...}}}}$ ;

b) $B = \sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{...}}}}$ ;

c) $C = \sqrt[5]{\dfrac{64}{\sqrt[5]{\dfrac{64}{\sqrt[5]{\dfrac{64}{...}}}}}}$ ;

d) $D = \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{2...}}}}$ ;

e) $E = \sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}}}$ .

**49)** Simplificar $\dfrac{\sqrt{a^3b^3\sqrt[4]{a^2b^2\sqrt[5]{ab}}}}{\sqrt[6]{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^nb^6}}}}}$.

**50)** Determinar o valor de $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}\sqrt[5]{\dfrac{5}{6}}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}\sqrt[5]{\dfrac{4}{5}}}}}{\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}}}}}$.

**51)** Simplificar $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}}}}$.

**52)** Se o expoente final de x é 15 em $\left(\dfrac{\sqrt[a]{x^{a-1}\sqrt[a]{x^{a^2+2}\sqrt[a]{x^{a^3-3}}}}}{\sqrt[a]{x\sqrt[a]{x^2\sqrt[a]{x^3}}}}\right)^a$, calcule o valor de a.

# BASES DE NUMERAÇÃO

## 2.1. INTRODUÇÃO

Base de um sistema de numeração é a quantidade de algarismos que podem ser utilizados para representar os números. Até então, neste livro, utilizamos o sistema de numeração de base 10, que já foi alvo de estudo do capítulo 3. Neste sistema os números são representados pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Entretanto, esta não é a única forma de representar um número. Ao longo da história várias civilizações utilizaram outros métodos para representar os números. Atualmente, usa-se o sistema de numeração posicional, onde os algarismos são ordenados da esquerda para a direita e a posição de cada algarismo diferencia o número. Por exemplo, na representação decimal do número 7329 o algarismo das unidades é 9 e representa $9.10^0$, o algarismo das dezenas é 2 e representa $2.10^1$, o algarismo das centenas é 3 e representa $3.10^2$ e o algarismo do milhar é 7 e representa $7.10^3$. Os algarismos também são denominados pela ordem que ocupam no número, de acordo com a potência a qual estão associados. Desta maneira, no número 7329, 9 é o algarismo de ordem 0 (está associado a $10^0$), 2 é o algarismo de ordem 1 (está associado a $10^1$), 3 é o algarismo de ordem 2 (está associado a $10^2$) e 7 é o algarismo de ordem 3 (está associado a $10^3$). Assim, a expressão que caracteriza a representação em base 10 do número tomado como exemplo é $7329 = 7.10^3 + 3.10^2 + 2.10^1 + 9.10^0$.

Outras bases são utilizadas no dia a dia, como por exemplo a base 60, usada na contagem do tempo em minutos e segundos. A base 12 é usada no comércio para contagem da quantidade de parafusos, bananas, etc. A base 2 é utilizada na linguagem de computadores, onde os números são sequências (algumas delas muito longas) dos algarismos 0 e 1. Para uma determinada base b ($2 \leq b \leq 10$) os algarismos desta base são os inteiros de 0 a b – 1. Por exemplo, na base 2 os dígitos são 0 e 1, na base 6 os dígitos são 0, 1, 2, 3, 4 e 5, enquanto que na base 8 os dígitos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Quando a base é maior que 10 é necessário usar letras para representar os algarismos maiores que 9. Por exemplo, na base 16 os algarismos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E e F, onde A representa 10, B representa 11, C representa 12, D representa 13, E representa 14 e F representa 15.

A forma geral de representar um número em base b ($b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$), cujos algarismos nesta base são, da esquerda para a direita, iguais a $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, é:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_b = a_n.b^n + a_{n-1}.b^{n-1} + \ldots + a_2.b^2 + a_1.b^1 + a_0.b^0$$

Nesta representação, a simbologia $(n)_b$ significa o número n escrito na base b. Por exemplo, uma vez que $14 = 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$, a representação do número 14 na base 2 é $(1110)_2$. Por outro lado, $25 = 4.6^1 + 1.6^0$ significa que o número 25 na base 6 é $(41)_6$. Para representar 125 na base 16 é necessário utilizar letras, pois $125 = 7.16^1 + 13.16^0$. Como na base 16 o algarismo 13 é representado pela letra D então pode-se afirmar que $(125)_{10} = (7D)_{16}$.

## 2.2. CONVERSÃO DE UMA BASE B PARA BASE 10

Para a conversão de um número escrito em uma base qualquer n em base 10 basta escrever o número na base n como a soma dos seus algarismos multiplicados pelas respectivas bases elevadas às ordens de cada algarismo e calcular o valor da soma, em base 10. Por exemplo, para converter o número x dado por $(a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0)_b$ para base 10 basta calcular, em base 10, o valor da soma

$$a_n.b^n + a_{n-1}.b^{n-1} + ... + a_2.b^2 + a_1.b^1 + a_0.b^0.$$

Assim, pode-se afirmar que:

$$(a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0)_b = (a_n.b^n + a_{n-1}.b^{n-1} + ... + a_2.b^2 + a_1.b^1 + a_0.b^0)_{10}$$

Por exemplo, para converter em base 10 o número binário $(10011)_2$ basta fazer:

$(10011)_2 = 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = (19)_{10}$.

Portanto, conclui-se que 10011 na base 2 equivale a 19 na base 10.

**2.3. Teorema**: Um número possui apenas uma única representação em determinada base

**Demonstração:**

Suponhamos, por absurdo, que um determinado número n possua duas diferentes representações em uma determinada base b. Assim:

$n = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$

$n = c_m b^m + c_{m-1}b^{m-1} + ... + c_2 b^2 + cb + c_0$

Logo:

$a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = c_m b^m + c_{m-1}b^{m-1} + ... + c_2 b^2 + cb + c_0 \Rightarrow$

$c_0 - a_0 = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 - c_m b^m - c_{m-1}b^{m-1} - ... - c_2 b^2 - c_1 b \Rightarrow$

$c_0 - a_0 = b(a_n b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + ... + a_2 b + a_1 - c_m b^{m-1} - c_{m-1}b^{m-2} - ... - c_2 b - c_1) \Rightarrow$

$b \mid c_0 - a_0$

Por outro lado, como $a_0$ e $c_0$ são dígitos em base b, tem-se que $0 \le a_0$ e $c_0 \le b - 1$, fazendo com que o intervalo de variação da subtração $c_0 - a_0$ obedeça ao intervalo $-(b-1) \le c_0 - a_0 \le b - 1$. Neste intervalo, o único número inteiro divisível por b é 0, ou seja, obrigatoriamente tem-se $a_0 = c_0$.

Assim:

$a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \ldots + a_2 b + a_1 - c_m b^{m-1} - c_{m-1} b^{m-2} - \ldots - c_2 b - c_1 = 0 \Rightarrow$

$c_1 - a_1 = a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \ldots + a_2 b - c_m b^{m-1} - c_{m-1} b^{m-2} - \ldots - c_2 b \Rightarrow$

$c_1 - a_1 = b(a_n b^{n-2} + a_{n-1} b^{n-3} + \ldots + a_2 - c_m b^{m-2} - c_{m-1} b^{m-3} - \ldots - c_2) \Rightarrow$

$b \mid c_1 - a_1 \Rightarrow a_1 = c_1$

Continuando com esse procedimento conclui-se que $a_2 = c_2$, $a_3 = c_3$, ...

Assim, as duas representações são idênticas, implicando que existe somente uma maneira de representar um número em determinada base.

## Exercícios Resolvidos

**1)** No sistema de numeração de base 3 um número é escrito como 2101. Determine o sistema no qual esse número se escreve 224.

**Solução:**

A forma mais simples de resolver esse tipo de questão é converter tudo pra base 10:

$(2101)_3 = (224)_b \Rightarrow 2.3^3 + 1.3^2 + 0.3 + 1 = 2.b^2 + 2.b + 4 \Rightarrow$

$64 = 2b^2 + 2b + 4 \Rightarrow 2b^2 + 2b - 60 = 0 \Rightarrow b^2 + b - 30 = 0 \Rightarrow$

$(b + 6)(b - 5) = 0 \Rightarrow b = 5$

**2)** (Colégio Naval-90) O cubo de $12_{(b)}$ é $1750_{(b)}$. A base de numeração b é:

(A) primo (B) impar não primo (C) par menor que 5

(D) par entre 5 e 17 (E) par maior que 17

**Solução: Alternativa D**

Convertendo para base 10 obtém-se:

$[12_{(b)}]^3 = 1750_{(b)} \Rightarrow (1.b + 2)^3 = 1.b^3 + 7.b^2 + 5.b + 0 \Rightarrow$

$b^3 + 6b^2 + 12b + 8 = b^3 + 7b^2 + 5b \Rightarrow b^2 - 7b - 8 = 0 \Rightarrow (b - 8)(b + 1) = 0 \Rightarrow$

$b = 8$

**3)** (UERJ-07) Admita a possibilidade de contar objetos de duas maneiras, uma na base x e outra na base (x + 3). Ao empregar essas duas maneiras para contar um determinado grupo de objetos, obtemos $(2343)_x = (534)_{x+3}$. Calcule o valor da base x e as outras duas raízes da equação resultante.

**Solução:**

Em base 10:

$(2343)_x = (534)_{x+3} \Rightarrow 2.x^3 + 3.x^2 + 4.x + 3 = 5.(x + 3)^2 + 3.(x + 3) + 4 \Rightarrow$

$2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = 5(x^2 + 6x + 9) + 3x + 9 + 4 \Rightarrow$

$2x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = 5x^2 + 30x + 45 + 3x + 13 \Rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 29x - 55 = 0$

Pesquisando as raízes da equação, se verifica que x = 5 é solução. Logo:

$2x^3 - 2x^2 - 29x - 55 = (x - 5)(2x^2 + 8x + 11)$

Assim, a base é x = 5 e as outras duas raízes são irracionais.

4) (Olimpíada do Canadá-77) N é um inteiro cuja representação em base b é 777. Determine o menor inteiro positivo b para o qual N é a quarta potência de um inteiro.

**Solução:**

Segundo o enunciado, tem-se que $(777)_b = k^4 \Rightarrow 7b^2 + 7b + 7 = k^4 \Rightarrow$
$7(b^2 + b + 1) = k^4 \Rightarrow 7 \mid k \Rightarrow$ o menor k é 7
Fazendo k = 7:

$b^2 + b + 1 = 343 \Rightarrow b^2 + b - 342 = 0 \Rightarrow (b + 19)(b - 18) = 0 \overset{b>0}{\Rightarrow} b = 18$

5) (Olimpíada da Austrália-18) Se $234_{b-1} - 234_{b-1} = 70_{70}$, como é $234_b$ em base 10?

**Solução:**

Convertendo tudo pra base 10: $234_{b+1} - 234_{b-1} = 70_{70} \Rightarrow$
$2(b + 1)^2 + 3(b + 1) + 4 - 2(b - 1)^2 - 3(b - 1) - 4 = 70 \Rightarrow$
$2b^2 + 4b + 2 + 3b + 3 - 2b^2 + 4b - 2 - 3b + 3 = 70 \Rightarrow 8b + 6 = 70 \Rightarrow b = 8$
Assim: $234_b = 234_8 = 2.8^2 + 3.8 + 4 = 156$

6) Durante muitos anos, a UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina) adotou um curioso modelo de questão em seu vestibular. Logo após o texto base da questão, há uma certa quantidade de afirmações sobre o assunto contido no texto base, que devem ser julgadas como verdadeiras ou falsas. As afirmativas são numeradas com potências de 2, iniciando em 1. Por exemplo, em uma questão com 6 afirmativas, as numerações são 1, 2, 4, 8, 16 e 32. O candidato deve assinalar no cartão resposta a soma das numerações das afirmativas que ele julgou serem verdadeiras. Por exemplo, se o candidato julgou que as verdadeiras são 1, 8 e 32, o número 1 + 8 + 32 = 41 deve ser assinalado no cartão resposta. É permitido que todas as afirmações sejam falsas, bastando o candidato deve assinalar o número 0. A coordenação do vestibular da UFSC garante que a partir de cada número corretamente assinalado no cartão resposta é possível identificar exatamente quais são as afirmativas que o candidato julgou serem verdadeiras.

a) Demonstre que a coordenação do vestibular da UFSC está correta.

b) Quantas números distintos podem ser assinalados no cartão resposta em uma questão com 6 afirmativas?

**Solução:**

a) Cada soma é da forma $N = x_n 2^n + x_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + x_3 2^3 + x_2 2^2 + x_1 2^1 + x_0 2^0$, onde $x_i = 1$ se a afirmação numerada com $2^i$ é verdadeira e $x_i = 0$ se a afirmação numerada com $2^i$ é falsa. Note que a expressão de N é exatamente igual a escrever N em base 2, ou seja, $N = (x_n x_{n-1} \ldots x_3 x_2 x_1 x_0)_2$. Como um número possui somente uma forma de ser representado em uma determinada base, existe apenas uma maneira de escolher os $x_i$ iguais a 0 ou 1.

b) Como cada $x_i$ pode valer 0 ou 1, existem $2^6$ possibilidades de escolher a sequência $(x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0)_2$, que é a representação de N em base 2.

## 2.3. CONVERSÃO DE BASE 10 PARA UMA BASE B QUALQUER

**Teorema:** Para converter um número x ($x \in IN$) em base 10 para uma outra base b qualquer basta seguir o seguinte procedimento:

- Divide-se x por b: $x = b.q_0 + r_0$
- Divide-se $q_1$ por b: $q_0 = b.q_1 + r_1$
- Divide-se $q_2$ por b: $q_1 = b.q_2 + r_2$
- ...
- Divide-se $q_{n-1}$ por b: $q_{n-1} = b.q_n + r_n$

Este procedimento é seguido até que seja encontrado um quociente igual a zero, que ocorre exatamente quando $q_{n-1} < b$. Desta forma, na última divisão tem-se $q_{n-1} = r_n$ e $q_n = 0$. O número x na base b é formado pela sequência, na ordem inversa em que são obtidos, dos restos das divisões efetuadas: $x = (r_n r_{n-1}...r_2 r_1 r_0)_b$.

**Demonstração:**

Seja o número x na base 10 dado por $x = (a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0)_{10}$. Deseja-se converter x na base b, de modo que $x = (b_m b_{m-1}...b_2 b_1 b_0)_b$. Em outras palavras, deve-se encontrar os dígitos (em base b) $b_m$, $b_{m-1}$, ..., $b_2$, $b_1$ e $b_0$ de modo que:

$a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 = b_m.b^m + b_{m-1}.b^{m-1} + ... + b_2.b^2 + b_1.b + b_0$

Inicialmente notemos que:

$a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} +...+ a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 = b(b_m.b^{m-1} + b_{m-1}.b^{m-2} +...+ b_2.b + b_1) + b_0$,

ou seja, $b_0$ é igual ao resto da divisão de x (na base 10) por b, onde o quociente desta divisão vale exatamente $b_m.b^{m-1} + b_{m-1}.b^{m-2} + ... + b_2.b + b_1$. Dividindo este quociente por b encontramos:

$b_m.b^{m-1} + b_{m-1}.b^{m-2} + ... + b_2.b + b_1 = b(b_m.b^{m-2} + b_{m-1}.b^{m-3} + ... + b_2) + b_1$,

onde conclui-se que o resto desta divisão é igual a $b_1$ e o quociente vale $b_m.b^{m-2} + b_{m-1}.b^{m-3} + ... + b_2$. Seguindo este processo pode-se concluir que os valores de $b_0$, $b_1$, $b_2$, ... são iguais aos restos das divisões sucessivas por b dos quocientes obtidos (onde a 1ª divisão é de x por b), até que seja encontrado um quociente igual a zero.

Por exemplo, vamos converter em base 8 o número decimal 3964. Para tanto, basta fazer o seguinte:

```
3964 | 8
32   495 | 8
 76  48  61 | 8
 72   15  56  7 | 8
  44   8   5   0
  40   7
   4
```

Os restos encontrados formam, na ordem inversa, a sequência dos algarismos do número na base 8. Assim: $(3964)_{10} = (7574)_8$.

## Exercícios Resolvidos

1) Num sistema de numeração de base b tem-se 57 + 33 = 112. Nesta mesma base calcule 57 × 33.

**Solução:**

Se $(57)_b + (33)_b = (112)_b$ então: $5b + 7 + 3b + 3 = b^2 + b + 2 \Rightarrow b^2 - 7b - 8 = 0 \Rightarrow (b - 8)(b + 1) = 0 \Rightarrow b = 8$

Portanto: $(57)_8 = 5.8 + 7 = 47$ e $(33)_8 = 3.8 + 3 = 27$

Desta maneira: $(57)_8 \times (33)_8 = 47 \times 27 = 1269$

Convertendo 1269 em base 8 tem-se:

| 1269 | 8 | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 158 | 8 | |
| 46 | 8 | 19 | 8 |
| 40 | 78 | 16 | 2 | 8 |
| 69 | 72 | 3 | 0 |
| 64 | 6 | | |
| 5 | | | |

Logo: $(57)_8 \times (33)_8 = (2365)_8$

2) (Colégio Naval-92) Um livro de **200** páginas vai ser reenumerado no sistema de numeração de base **8**. O número na base **10** de algarismos que serão utilizados é:

a) 520 b) 525 c) 530 d) 535 e) 540

**Solução: Alternativa C**

Convertendo 200 na base 8 tem-se:

| 200 | 8 | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 25 | 8 | |
| 40 | 24 | 3 | 8 |
| 40 | 1 | 0 | |
| 0 | | | |

Assim, conclui-se que $(200)_{10} = (310)_8$

De $(1)_8$ até $(7)_8$ foram usados 7 algarismos.

De $(10)_8$ até $(77)_8$ foram usados 2.7.8 = 112 algarismos.

De $(100)_8$ até $(277)_8$ são usados 3.2.8.8 = 384 algarismos.

De $(300)_8$ até $(307)_8$ são usados 3.1.1.8 = 24 algarismos.

Para escrever $(310)_8$ usa-se 3 algarismos.

Portanto, são utilizados 7 + 112 + 384 + 24 + 3 = 530 algarismos.

3) (IME-72) Sejam $b \in Z$, $b > 1$ e $M \in N$. Suponhamos que M expresso sob a forma $M = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$, onde os coeficientes satisfazem a relação $0 \leq a_i \leq b - 1$, $\forall i \in \{0, 1, 2, ..., p\}$. Dizemos, então, que a representação de M na base de numeração b é $M = (a_p a_{p-1} ... a_2 a_1 a_0)_b$, onde o índice b indica a base considerada.

a) Determine, com a notação exposta acima, a representação de 1347 na base 10 e de 929 na base 5.

b) Determine em que base(s) de numeração é verificada a igualdade

$$(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b.$$

c) Mostre que se $M = (14641)_b$, então independentemente da base considerada, M é um quadrado perfeito. Determine a representação de $\sqrt{M}$ na base b + 1.

d) Determine a representação de $M = (14654)_b$ na base b + 1.

**Solução:**

a) A representação de 1347 em base 10 é:

$$1347 = 1.10^3 + 3.20^2 + 4.10 + 7$$

Convertendo 929 em base 5:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 929 | 5 | | | | |
| 5 | 185 | 5 | | | |
| 42 | 15 | 37 | 5 | | |
| 40 | 35 | 35 | 7 | 5 | |
| 29 | 35 | 2 | 5 | 1 | 5 |
| 25 | 0 | | 2 | | 0 |
| 4 | | | | | |

Assim, tem-se que $(929)_{10} = (12204)_5$, ou seja:

$929 = 1.5^4 + 2.5^3 + 2.5^2 + 0.5^1 + 4$

b) $(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b \Rightarrow$

$2.b^3 + 2 + 2.5 + 1 = 2.b^2 + 2.b + b^3 + b^2 + 2.b + 1 \Rightarrow$

$b^3 - 3b^2 - 4b + 12 = 0 \Rightarrow (b - 2)(b + 2)(b - 3) = 0 \Rightarrow b = 2$ ou $b = 3$

c) $M = (14641)_b = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 = (b + 1)^4 = [(b + 1)^2]^2$

Como $\sqrt{M} = 1.(b+1)^2 + 0.(b+1)^1 + 0.(b+1)^0$, então a representação de $\sqrt{M}$ em base b + 1 é igual a $M = (100)_{b+1}$

d) $M = (14654)_b = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 5b + 4 \Rightarrow$

$M = (b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1) + b + 4 \Rightarrow$

$M = (b + 1)^4 + (b + 1) + 3 \Rightarrow$

$M = 1.(b + 1)^4 + 0.(b + 1)^3 + 0.(b + 1)^2 + 1.(b + 1) + 3.(b + 1)^0$

Então $M = (10013)_{b+1}$

## Exercícios propostos

1) Converta o número 463 de base 10 para base 16.

2) Sejam a = 1011 e b = 111 dois números escritos no sistema de numeração de base dois. Calcule, em base dois, o valor do produto ab.

3) (ESSA-87) Entre as alternativas abaixo, a única falsa é:
(A) $(111)_2 = 7$ (B) $4 = (100)_2$
(C) $(1000)_2 = 8$ (D) $10 = (1011)_2$
(E) $21 = (10101)_2$

4) (ESSA-88) O número binário 101010 (base 2) escrito na base 5, é:
(A) 132 (B) 231 (C) 312 (D) 321 (E) 345

5) (CM Salvador-07) Nosso sistema de numeração é decimal pois existem dez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Os computadores utilizam um sistema de numeração binário, ou seja, só utilizam 2 símbolos: 0 e 1. Dessa forma, o primeiro número desse sistema é 1, o segundo é 10, o terceiro é 11, o quarto é 100, e assim por diante. O número 10.000 do sistema binário corresponde, no sistema decimal, ao número:
(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

6) (UEM-10) Considerando os números naturais capicuas, também denominados palíndromos, de quatro algarismos, isto é, os números do tipo abba que podem ser lidos da esquerda para a direita, ou da direita para a esquerda, da mesma forma, assinale o que for correto.
01) No sistema decimal, todo número abba, com algarismos a e b em {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, pode ser escrito como $1001 \times a + 110 \times b$.
02) No sistema decimal, todo número capicua de quatro algarismos é divisível por 11.
04) O número decimal 9, quando representado no sistema de numeração de base 2, cujos algarismos pertencem a {0, 1}, é capicua.
08) O número $(2112)_3$, na base 3, quando representado na base 10, é divisível por 3.
16) O número $(abba)_n$, na base n, $n > 1$, quando representado na base 10, é múltiplo de $n + 1$.

7) (UERJ-07) Um sistema de numeração de base b, sendo $b \geq 2$, utiliza b algarismos: 0, 1, 2, 3, ..., b – 1. O sistema de numeração usual é o decimal. Quando

escrevemos um número nesse sistema, a base 10 não precisa ser indicada. Por exemplo, o número 3548 corresponde a $3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$. Em qualquer outro sistema, é preciso indicar a base. Por exemplo, o número $(2043)_5$ está escrito na base b= 5 e corresponde a $2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 50$, ou seja, 273 no sistema decimal.

a) Sabe-se que, em qualquer base, o acréscimo de zeros à esquerda da representação de um número não altera seu valor. Os números $(301)_7$ e $(0301)_7$ são, portanto, iguais e formados por três algarismos. Calcule, no sistema de numeração de base 7, a quantidade total de números que possuem somente quatro algarismos distintos.

b) Admita a possibilidade de contar objetos de duas maneiras, uma na base x e outra na base (x + 3). Ao empregar essas duas maneiras para contar um determinado grupo de objetos, obtemos $(2343)_x = (534)_{x+3}$. Calcule o valor da base x.

**8)** (Unicamp-94) Os números a = 2121 e b = 136 estão escritos nos sistemas de numeração de bases 3 e 7, respectivamente.

a) Como se procede para descobrir qual desses números é o maior?

b) Determine, então, o maior deles.

**9)** (Unifei-10) Os números A e B , escritos nas bases 3 e 4 , respectivamente, são $A = 22212_{(3)}$ e $B = 20301_{(4)}$ . Quanto vale a soma A + B no sistema de numeração decimal?

**10)** (IME-92) Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

**11)** Represente: a) $x^n$ na base x; b) $x^n - 1$ na base x.

**12)** Faça as conversões de base abaixo:

a) $(1593)_{10} = (\quad)_5$

b) $(439)_{10} = (\quad)_4$

c) $(2073)_{10} = (\quad)_8$

d) $(325)_6 = (\quad)_{10}$

e) $(257)_8 = (\quad)_{10}$

f) $(3213)_4 = (\quad)_{10}$

g) $(354)_7 = (\quad)_5$

h) $(224)_5 = (\quad)_3$

i) $(235)_6 = (\quad)_7$

j) $(523)_7 = (\quad)_5$

k) $(243)_5 = (\quad)_3$

l) $(435)_6 = (\quad)_7$

m) $(647)_8 = (\quad)_6$

n) $(314)_5 = (\quad)_2$
o) $(723)_8 = (\quad)_9$
p) $(412)_7 = (\quad)_3$
q) $(321)_8 = (\quad)_9$
r) $(466)_7 = (\quad)_4$
s) $(178)_9 = (\quad)_2$
t) $(516)_8 = (\quad)_7$
u) $(121)_3 = (\quad)_9$
v) $(421)_5 = (\quad)_4$
w) $(312)_6 = (\quad)_9$
x) $(878)_9 = (\quad)_3$
y) $(656)_7 = (\quad)_6$
z) $(543)_6 = (\quad)_4$

**13)** (Colégio Naval-13) Os números $(35041000)_7$, $(11600)_7$ e $(62350000)_7$ estão na base 7. Esses números terminam, respectivamente, com 3, 2 e 4 zeros. Com quantos zeros terminará o número de base decimal $n = 21^{2012}$, na base 7?
a) 2012 b) 2013 c) 2014 d) 2015 e) 2016

**14)** (Colégio Naval-10) O número natural 198 está escrito na base 10. Em quantas bases de numeração o número dado é escrito com três algarismos?
a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

**15)** (Unimontes-11) No sistema de numeração em base 5, a contagem é feita assim: 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, ... O número 69, na base 10, quando descrito em base 5, é um número formado por
a) 3 dígitos consecutivos.
b) 2 dígitos consecutivos.
c) 2 dígitos não consecutivos.
d) 3 dígitos não consecutivos

**16)** (IME-18) Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base x – 1 é 1431, então a sua representação na base binária é:
(A) 1 0 0 0 1 1 1 1 (B) 1 1 0 1 1 0 1 1
(C) 1 1 1 0 0 1 1 1 (D) 1 1 0 1 1 1 1 0
(E) 1 1 1 1 0 0 0 1

**17)** (Olimpíada da Austrália-17) O número x é 111 em base b e 212 em base b – 2. Como é x em base 10?

# MÉDIAS

## 3.1. MÉDIA ARITMÉTICA

**Definição:** A média aritmética dos números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ é dada por

$$M.A. = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Por exemplo, a média aritmética dos números 2, 5, 1 e 4 é

$$M.A. = \frac{2+5+1+4}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

## 3.2. MÉDIA PONDERADA

**Definição:** A média ponderada dos números reais $a_1$ com peso $p_1$, $a_2$ com peso $p_2$, ..., $a_n$ com peso $p_n$ é dada por $M.P. = \frac{a_1.p_1 + a_2.p_2 + ... + a_n.p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$

Por exemplo, a média ponderada dos números 3 com peso 1, 4 com peso 2 e 1 com peso 5 é igual a $M.P. = \frac{3.1+4.2+1.5}{1+2+5} = \frac{16}{8} = 2$.

Observe que a média aritmética pode ser interpretada como uma média ponderada onde todos os pesos são iguais.

## 3.3. MÉDIA GEOMÉTRICA

**Definição:** A média geométrica dos números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ é dada por $M.G. = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$.

Por exemplo, a média geométrica dos números 2, 6, 27 e 64 vale:

$\sqrt[4]{2.6.27.64} = \sqrt[4]{20736} = 12$

## 3.4. MÉDIA HARMÔNICA

**Definição:** A média harmônica dos números reais não nulos $a_1, a_2, ..., a_n$ é dada por

$$M.H. = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Por exemplo, A média harmônica dos números 1, 2, 2, 3 e 6 é

$$M.H. = \frac{5}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{5}{2}} = 2.$$

## 3.5. MÉDIA QUADRÁTICA

**Definição:** A média quadrática dos números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ é dada por

$$M.Q. = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

Por exemplo, a média quadrática dos quatro números 3, 4, 13 e 84:

$$M.Q. = \sqrt{\frac{3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2}{4}} = \sqrt{\frac{7225}{4}} = \sqrt{\frac{85^2}{2^2}} = \frac{85}{2} = 42,5$$

## 3.6. DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS

Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais positivos então **M.Q. ≥ M.A. ≥ M.G. ≥ M.H.:**

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 . a_2 ... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

A igualdade entre qualquer par dessas médias ocorre apenas se todos os números forem idênticos: $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

A demonstração desse resultado utiliza recursos muito avançados pro escopo desse livro, que é o ensino fundamental.

Utilizando a desigualdade entre as médias se podem desenvolver algumas relações importantes na matemática. Por exemplo, impondo que M.A. ≥ M.G., sendo x e y números reais positivos, segue que:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 . y^2} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$$

De forma análoga, como a média quadrática é maior ou igual que a média aritmética:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} \Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

Finalmente, como a média aritmética é maior ou igual que a média harmônica, sendo a, b e c positivos:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \Rightarrow (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Acompanhe os exercícios resolvidos pra entender como a desigualdade entre as médias é aplicada.

## Exercícios Resolvidos

**1)** (UEPB-06) A média aritmética das alturas de cinco edifícios é de 85 metros. Se for acrescentado a apenas um dos edifícios mais um andar de 3 metros de altura, a média entre eles passará a ser:

a) 85,6 m b) 86 m c) 85,5 m d) 86,6 m e) 86,5 m

**Solução: Alternativa A**

$$\frac{h_1+h_2+h_3+h_4+h_5}{5}=85 \Rightarrow h_1+h_2+h_3+h_4+h_5=425$$

$$\frac{(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)+3}{5}=\frac{428}{5}=85,6 \text{ m}$$

**2)** (UEL-07) Dois números têm média aritmética 4,1 e média geométrica 4 . A alternativa correta que apresenta o maior deles é:

a) 1 b) 4 c) 2 d) 8,2 e) 5

**Solução: Alternativa E**

$$\frac{x+y}{2}=4,1 \Rightarrow x+y=8,2 \Rightarrow y=8,2-x$$

$$\sqrt{x.y}=4 \Rightarrow x.y=16 \Rightarrow x(8,2-x)=16 \Rightarrow 8,2x-x^2=16 \Rightarrow$$

$x^2-8,2x+16=0 \Rightarrow (x-3,2)(x-5)=0 \Rightarrow x=3,2$ e $y=5$ ou $x=5$ e $y=3,2$

Assim, o maior dos números é 5.

**3)** (Colégio Naval-02) Se os números x, y e z são, respectivamente, iguais às médias aritmética, geométrica e harmônica de dois números reais positivos, então:

a) $xz=1$ b) $zx=y$ c) $xz=y^2$ d) $y^2+x^2=x^2$ e) $(y+z)^2=x^2$

**Solução: Alternativa C**

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\sqrt{a.b},\ z=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Portanto: $z=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2y^2}{2x}=\frac{y^2}{x} \Rightarrow x.z=y^2$

**4)** (Colégio Naval-07) O produto de dois números reais x e y é igual a 150. Assim sendo, x + y NÃO pode ser igual a:

a) 31,71 b) 28,27 c) 25,15 d) 24,35 e) –26,94

**Solução: Alternativa D**

Sabe-se que a média aritmética de dois números positivos é sempre maior ou igual que a média geométrica destes dois números. Como a enunciado não cita se os números são positivos, deve-se trabalhar com seus módulos.

Desta forma: $\frac{|x|+|y|}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{150} \Rightarrow |x| + |y| \geq 24,5 \Rightarrow$

$x + y \leq -24,5$ ou $x + y \geq 24,5$

Das alternativas a única que indica um valor fora dos dois intervalos acima é 24.35

5) (EPCAr-01) Uma escola tem 18 professores. Um deles se aposenta e é substituído por um professor de 22 anos. Com isso, a média das idades dos professores diminui de 2 anos. A idade, em anos, do professor que se aposentou é

a) 52 b) 54 c) 56 d) 58

**Solução: Alternativa D**

Sejam $x_1, x_2, ..., x_{18}$ as idades dos professores da escola. Suponha que $x_1$ é a idade do professor que se aposenta. Assim, pode-se afirmar que:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{18}}{18} \Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{18} = 18M \Rightarrow x_2 + ... + x_{18} = 18M - x_1$$

$$M - 2 = \frac{22 + x_2 + ... + x_{18}}{18} \Rightarrow 22 + x_2 + ... + x_{18} = 18(M - 2) \Rightarrow$$

$$22 + 18M - x_1 = 18M - 36 \Rightarrow x_1 = 58$$

6) (Olimpíada Paraense-04) Quatro números pares consecutivos são removidos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Se a média aritmética dos números restantes é 51.5625, determine o valor de n e quais são os números removidos?

**Solução:**

Notemos inicialmente que $51.5625 = \frac{515625}{10000} = \frac{825}{16}$.

Assim, denotando por S a soma dos $n - 4$ números, nós temos que:

$$\frac{S}{n-4} = \frac{825}{16} \Rightarrow 16.S = 825(n - 4).$$

Desde que 16 e 825 são primos relativos, então $16 \mid (n - 4) \Rightarrow n = 16k + 4$, para algum inteiro positivo k (k não pode ser 0 desde que n deve ser ao menos 8, uma vez que A deve possuir pelo menos 4 números pares).

A soma de todos os números em A é $\frac{n(n+1)}{2}$, implicando que a média dos seus valores é $\frac{n+1}{2}$. Como quatro números são removidos, a média aritmética deve alterar, mas não deve alterar relativamente muito. Assim, espera-se que $\frac{n+1}{2}$ seja próximo de 51,5625, ou seja, $n + 1$ deve ser próximo de 103,125.

Desde que os valores de $16k + 4$ próximos de 103,125 são 84, 100 e 116, temos três candidatos a valores de n para serem testados.

i) $n = 84$: Sejam $a - 3$, $a - 1$, $a + 1$ e $a + 3$ os números retirados.

Portanto: $\frac{(1+2+3+...+84)-4a}{80}=\frac{825}{16} \Rightarrow 3570-4a=4125 \Rightarrow$

$4a = -555 \Rightarrow$ a não é inteiro.

ii) n = 100: Sejam a – 3, a – 1, a + 1 e a + 3 os números retirados.

Portanto: $\frac{(1+2+3+...+100)-4a}{96}=\frac{825}{16} \Rightarrow 5050-4a=4950 \Rightarrow$

$4a = 100 \Rightarrow a = 25 \Rightarrow$ os quatro números são 22, 24, 26 e 28.

iii) n = 116:

Sejam a – 3, a – 1, a + 1 e a + 3 os números retirados. Portanto:

$\frac{(1+2+3+...+116)-4a}{112}=\frac{825}{16} \Rightarrow 6786-4a=5775 \Rightarrow 4a=1011 \Rightarrow$

a não é inteiro.

Assim, a única possibilidade é n = 100 e os números retirados são 22, 24, 25, e 28.

7) (OBM-11) Sendo a e b reais tais que $0 < a \leq 1$ e $0 < b \leq 1$, o maior valor que $\frac{ab}{a+b}$ pode assumir é

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

**Solução: Alternativa D**

Observe que $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{2}\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ é metade da média harmônica de a e b. Como toda média, seu valor é máximo quando a e b são máximos, ou seja, iguais a 1, fazendo com que $\frac{ab}{a+b}$ seja igual a 1/2.

8) (OBM-01) Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para quaisquer números reais positivos a, b e c.

**Solução:**

Note que $(a + b)(a + c) = a^2 + ac + ab + bc = a(a + b + c) + bc$

Como a média aritmética de números positivos é sempre maior ou igual que a média geométrica:

$$\frac{a(a+b+c)+bc}{2} \geq \sqrt{a(a+b+c)bc} \Rightarrow (a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

## Exercícios propostos

1) (FGV-09) Se a média aritmética entre dois números é 15 e sua média geométrica é 12, então, uma equação cujas duas raízes reais sejam esses dois números é
A) $2x^2 - 60x + 37 = 0$. B) $x^2 - 30x + 120 = 0$. C) $x^2 - 30x + 144 = 0$.
D) $x^2 + 6x + 120 = 0$. E) $2x^2 + 12x - 15 = 0$.

2) (CM Brasília-05) Os números a, b, c são inteiros positivos tais que $a < b < c$. Se b é a média aritmética simples entre a e c, então necessariamente a razão $\frac{b-a}{c-b}$ pode ser igual a
A ( ) a/a B ( ) a/b. C ( ) a/c. D ( ) b/c. E ( ) – (b/b).

3) (CM Brasília-05) A média geométrica entre três números inteiros positivos é igual à sua média aritmética. Se o produto entre eles é igual a 729, então a sua soma é igual a
A ( ) 15. B ( ) 18. C ( ) 27. D ( ) 54. E ( ) 81.

4) (CM Santa Maria-17) O Exército Brasileiro, em 2017, realizou os XI Jogos da Amizade nas instalações da Academia Militar das Agulhas Negras. Trata-se de um evento esportivo e artístico-cultural, com a participação de alunos do Sistema Colégio Militar do Brasil. A delegação do Colégio Militar de Santa Maria (CMSM) sagrou-se campeã na modalidade de handebol masculino. A tabela abaixo mostra a quantidade de jogadores do time de handebol do CMSM que possuem a mesma idade.

| Quantidade de jogadores | Idade (anos) |
|---|---|
| 01 | 12 |
| 02 | 13 |
| 04 | 14 |
| 03 | 15 |
| 02 | 16 |
| X | 17 |
| 02 | 18 |

A idade da técnica de handebol masculino é 30 anos. Considerando a idade de todos os jogadores indicados na tabela acima, e a idade da técnica, sabe-seque a média aritmética ponderada das idades é de 16 anos. Assinale a alternativa que expressa o valor de "X", o qual indica o número de jogadores que têm dezessete anos.
a) 04 b) 03 c) 05 d) 06 e) 02

5) (CM Manaus-09) A média aritmética de um conjunto de 11 números é 45. Se o número 8 que está entre esses onze números for retirado do conjunto, a média aritmética dos números restantes será:
a) ( ) 48,7 b) ( ) 48 c) ( ) 47,5 d) ( ) 42 e) ( ) 41,5

6) (CM RJ-09) Em um grande lançamento imobiliário, os cinco vendedores de plantão realizaram, numa semana, as seguintes vendas de unidades: Ademar vendeu 71, Bastos 76, Sobral 80, Calvet 82 e Euler 91. Valéria é a diretora do departamento de vendas da empresa e precisa calcular a venda média de unidades realizada por estes cinco profissionais. Curiosamente observou que, à medida que os valores iam sendo digitados e a média calculada, o programa de computador adotado gerava para resultados números inteiros. Assim, a última venda digitada por Valéria foi a realizada por:
(A) Calvest (B) Bastos (C) Ademar (D) Sobral (E) Euler

7) (Colégio Naval-10) Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual o valor mínimo do produto pq?
a) 8040 b) 4020 c) 2010 d) 1005 e) 105

8) (Colégio Naval-17) Sejam x e y números reais tais que $xy = 2\sqrt{3}$. Sendo assim, o valor mínimo de $x^8 + y^8$ é
a) múltiplo de 18. b) um número primo. c) divisível por 5.
d) divisível por 13. e) par maior que 300.

9) (CM BH-15) Durante a aplicação de uma avaliação parcial de Matemática, em uma turma do 1° ano do ensino médio do CMBH, constatou-se que 2 alunos haviam faltado, e que a média obtida pelos 28 alunos restantes, na 1ª chamada da avaliação, foi igual a 6,8. Ao realizarem a 2ª chamada da avaliação, as notas obtidas pelos 2 alunos que faltaram, elevaram a média inicial da turma em 0,1 ponto. Sabendo-se que a diferença entre as notas que cada um dos dois alunos obteve é igual a 3,0, pode-se concluir que:
a) a menor nota obtida na 2ª chamada foi inferior a 6,0.
b) a média das notas obtidas pelos dois alunos é inferior a 8,0.
c) a maior nota obtida na 2ª chamada foi superior a 9,5.
d) a maior nota obtida não foi superior a 9.
e) a média obtida na 2ª chamada pelos dois alunos foi igual a 6,9.

10) (UFU-10) Um time de voleibol possui um plantel formado por jovens atletas, contendo x pessoas cuja média aritmética das idades é de 20 anos. O presidente do time resolveu contratar um técnico e um preparador físico experientes,

coincidentemente, ambos com 50 anos. Sabendo que, com a entrada destas duas novas pessoas no plantel, a nova média das idades passou para 24 anos, pode-se afirmar que

A) $10 < x \leq 12$ B) $12 < x \leq 15$ C) $x > 16$ D) $x \leq 9$

**11)** (Unemat-09) As notas do boletim de um aluno em determinada escola são representadas na tabela a seguir:

| Matérias | Notas | | |
|---|---|---|---|
| | Etapa 1 | Etapa 2 | Etapa 3 |
| Português | 6 | 8 | 9 |
| Matemática | 4 | 7 | 5 |
| Física | 4 | 8 | 9 |
| Química | 8 | 7 | 6 |
| História | 10 | 8 | 9 |

As notas desse boletim podem ser representadas por uma matriz cujas linhas são as matérias e as colunas, as três etapas do curso. Nessa escola, a média das notas é ponderada e os pesos são 1 para Etapa 1, 2 para Etapa 2 e 3 para Etapa 3. Qual é a média ponderada da disciplina de Matemática ao final das três etapas do curso?

**12)** (IME-13) Considere as inequações abaixo:

I) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

II) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

III) $(a^2 - b^2)^2 \geq (a - b)^4$

Esta(ão) correta(s), para quaisquer valores reais positivos de a, b e c, a(a) inequação(ões)

a) II apenas. b) I e II apenas. c) I e III apenas.

d) II e III apenas. e) I, II e III.

**13)** (Colégio Naval-16) Para obter o resultado de uma prova de três questões, usa-se a média ponderada entre as pontuações obtidas em cada questão. As duas primeiras questões têm peso 3,5 e a 3ª, peso 3. Um aluno que realizou essa avaliação estimou que:

I – sua nota na 1ª questão está estimada no intervalo fechado de 2,3 a 3,1; e

II – sua nota na 3ª questão foi 7.

Esse aluno quer atingir média igual a 5,6. A diferença da maior e da menor nota que ele pode ter obtido na 2ª questão de modo a atingir o seu objetivo de média é

a) 0,6 b) 0,7 c) 0,8 d) 0,9 e) 1

**14)** (Unesp-09) Durante o ano letivo, um professor de matemática aplicou cinco provas para seus alunos. A tabela apresenta as notas obtidas por um determinado aluno em quatro das cinco provas realizadas e os pesos estabelecidos pelo professor para cada prova. Se o aluno foi aprovado com média final ponderada igual a 7,3, calculada entre as cinco provas, a nota obtida por esse aluno na prova IV foi:

| PROVA | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| NOTA | 6,5 | 7,3 | 7,5 | ? | 6,2 |
| PESO | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 |

A) 9,0. B) 8,5. C) 8,3. D) 8,0. E) 7,5.

15) (ESSA-12) A média aritmética de todos os candidatos de um concurso foi 9,0, dos candidatos selecionados foi 9,8 e dos eliminados foi 7,8. Qual o percentual de candidatos selecionados?
A) 20% B) 25% C) 30% D) 50% E) 60%

16) (Colégio Naval-78) A soma da média aritmética coma média geométrica das raizes da equação $ax^2 - 8x + a^3 = 0$ dá :

(A) $\frac{4-a^2}{a}$ (B) $\frac{-4+a^2}{a}$ (C) $\frac{8+a^2}{a}$ (D) $\frac{4+a^2}{a}$ (E) 5

17) (Colégio Naval-07) O produto de dois números reais x e y é igual a 150. Assim sendo, x + y NÃO pode ser igual a:
a) 31,71 b) 28,27 c) 25,15 d) 24,35 e) –26,94

18) (Colégio Naval-86) Sabendo que a media aritmética e a média harmônica entre dois números naturais valem, respectivamente, 10 e $\frac{32}{5}$, pode-se dizer que a media geométrica entre esses números será igual a:
(A) 3,6 (B) 6 (C) 6,4 (D) 8 (E) 9

19) (Colégio Naval-90) No Colégio Naval, a turma do 1° ano é distribuída em 5 salas. Num teste de Álgebra, as médias aritméticas das notas dos alunos, por sala, foram respectivamente: 5,5: 5,2: 6,3: 7,1 e 5,9. A média aritmética das notas da turma é:
(A) 5,9 (B) 6,0 (C) 6,15 (D) 6,5
(E) impossível de ser calculada com esses dados

20) (Colégio Naval-95) Sejam $M = \frac{x.y}{x+y}$, onde x e y são reais positivos, logo M é:
(A) o quociente entre a média geométrica e a média aritmética de x e y
(B) a metade do quociente entre a média geométrica e a media aritmética de x e y.
(C) a média aritmética dos inversos de x e y.
(D) a média harmônica de x e y.
(E) a metade da média harmônica de x e y.

**21)** (Colégio Naval-82) Se **h**, **g** e **a** são, respectivamente, as médias; harmônica, geométrica e aritmética entre dois números, então:

a) $ah = 2g$ b) $ah = g$ c) $ah = 2g^2$ d) $ah = g^2$ e) $ah = 2\sqrt{g}$

**22)** (Colégio Naval-01) Um aluno calculou a média aritmética entre os cem primeiros números inteiros positivos, encontrando $50\frac{1}{2}$. Retirando um desses números, encontrou como nova média aritmética $50\frac{27}{99}$. O número retirado está entre:

A) 30 e 40 B) 40 e 50 C) 50 e 60 D) 60 e 70 E) 70 e 80

**23)** (Colégio Naval-02) A soma de dois números reais distintos é igual ao produto desses números. O menor valor natural desse produto é igual a:

a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

**24)** (Colégio Naval-07) Com a finalidade de se pesquisar a renda média em reais M da sua população, uma determinada região S foi dividida em quatro setores: X, Y, Z e W, com, respectivamente, 2.550, 3.500, 3.750 e 4.200 pessoas. Observou-se, então, que a renda média em reais de X é de 800,00, a de Y é de 650,00, a de Z é de 500,00 e a de W é de 450,00. Logo

a) $605{,}00 < M < 615{,}00$ b) $595{,}00 < M < 605{,}00$
c) $585{,}00 < M < 595{,}00$ d) $575{,}00 < M < 585{,}00$
e) $565{,}00 < M < 575{,}00$

**25)** (EPCAr-04) A média aritmética de notas no 1° bimestre em matemática dos 100 alunos do CPCAR 2002 foi de 72,5. Retirando-se a nota de um desses alunos, encontrou-se a nova média aritmética 72,3. Sabendo que as notas variam entre 1 e 100 e que as cem notas obtidas não são todas iguais, pode-se afirmar que a nota retirada está no intervalo

a) [75, 80] b) [85, 90[ c) [90, 95[ d) [95, 100]

**26)** (ENEM-14) A tabela apresenta uma estimativa da evolução da população brasileira por faixa etária, em milhões de pessoas, para 2020, 2030 e 2045.

| Ano / Faixa etária | 2020 | 2030 | 2045 |
|---|---|---|---|
| Até 14 anos | 49 | 48 | 48 |
| De 15 a 49 anos | 111 | 112 | 110 |
| De 50 anos ou mais | 50 | 63 | 78 |
| Total | 210 | 223 | 236 |

STEFANO, F. Mais velho e mais rico: os ganhos da maturidade.

Com base na tabela, o valor que mais se aproxima da média dos percentuais da população brasileira na faixa etária até 14 anos, nos anos de 2020, 2030 e 2045, é
a) 21,5. b) 21,7. c) 48,0. d) 48,3. e) 48,5.

27) (ENEM-15) Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

| Candidato | Média nas quatro primeiras etapas | Pontuação na quinta etapa |
|---|---|---|
| A | 90 | 60 |
| B | 85 | 85 |
| C | 80 | 95 |
| D | 60 | 90 |
| E | 60 | 100 |

A ordem de classificação final desse concurso é
a) A, B, C, E, D. b) B, A, C, E, D. c) C, B, E, A, D.
d) C, B, E, D, A. e) E, C, D, B, A.

28) (ENEM-17) A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

| Avaliação | Média de notas ($M$) |
|---|---|
| Excelente | $9 < M \leq 10$ |
| Bom | $7 \leq M \leq 9$ |
| Regular | $5 \leq M < 7$ |
| Ruim | $3 \leq M < 5$ |
| Péssimo | $M < 3$ |

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte. Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matricula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

| Disciplinas | Notas | Número de créditos |
|---|---|---|
| I | | 12 |
| II | 8,00 | 4 |
| III | 6,00 | 8 |
| IV | 5,00 | 8 |
| V | 7,50 | 10 |

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é
a) 7,00. b) 7,38. c) 7,50. d) 8,25. e) 9,00.

29) (ENEM-14) Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

| | Reagente 1 | Reagente 2 | Reagente 3 | Reagente 4 | Reagente 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Experimento 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| Experimento 2 | 6 | 6 | 3 | 4 | 2 |
| Experimento 3 | 6 | 7 | 8 | 7 | 9 |
| Experimento 4 | 6 | 6 | 10 | 8 | 10 |
| Experimento 5 | 11 | 5 | 11 | 12 | 11 |

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

30) (ENEM-10) Com o intuito de tentar prever a data e o valor do reajuste do próximo salário mínimo, José primeiramente observou o quadro dos reajustes do salário mínimo de abril de 2000 até fevereiro de 2009, mostrada a seguir.

Ele procedeu da seguinte maneira: computou o menor e o maior intervalo entre dois reajustes e computou a média dos valores encontrados, e usou este resultado para predizer a data do próximo aumento. Em seguida, determinou o menor e o maior reajuste percentual ocorrido, tomou a média e usou este resultado para determinar o valor aproximado do próximo salário.

| Mês | Ano | Valor |
|---|---|---|
| Abril | 2000 | R$ 151,00 |
| Abril | 2001 | R$ 180,00 |
| Abril | 2002 | R$ 200,00 |
| Abril | 2003 | R$ 240,00 |
| Maio | 2004 | R$ 260,00 |
| Maio | 2005 | R$ 300,00 |
| Abril | 2006 | R$ 350,00 |
| Abril | 2007 | R$ 380,00 |
| Março | 2008 | R$ 415,00 |
| Fevereiro | 2009 | R$ 465,00 |

Tabela de Salário mínimo nominal vigente. Disponível em: www.[illegible].gov.br. Acesso em: 03 maio 2009.

De acordo com os cálculos de José, a data do novo reajuste do salário mínimo e o novo valor aproximado do mesmo seriam, respectivamente,
a) fevereiro de 2010 e R$ 530,89.
b) fevereiro de 2010 e R$ 500,00.
c) fevereiro de 2010 e R$ 527,27.
d) janeiro de 2010 e R$ 530,89.
e) janeiro de 2010 e R$ 500,00.

31) (Olimpíada de Campina Grande-03) A média aritmética de um conjunto com 11 elementos é 45. Se o número 8 for retirado do conjunto, a média aritmética dos números restantes será igual a:
A) 48,5 B) 48,4 C) 48,7 D) 48,9 E) 38,4

32) (Olimpíada de Campina Grande-03) Numa classe de 8ª série do ensino fundamental, 80% dos alunos passaram no exame final e a média deles foi 0,8 pontos acima da nota de aprovação. A média dos alunos reprovados foi 1,2 pontos abaixo da nota de aprovação. A média global dos alunos foi 6,6. Qual foi a média de aprovação?

33) (OBM-98) A média aritmética de seis números é 4. Quando acrescentamos um sétimo número, a nova média é 5. O número que foi acrescentado é:
A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 11

34) (OBM-00) Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na Turma A e os 30 seguintes na Turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu-se passar o último colocado da Turma A para a Turma B. Com isso:
A) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.
B) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.
C) As médias de ambas as turmas melhoraram.
D) As médias de ambas as turmas pioraram.
E) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

35) (OBM-03) Considere as seguintes definições:
- A *média aritmética* de dois números reais positivos é a metade da sua soma.
- A *média harmônica* de dois números reais positivos é o inverso da média aritmética dos inversos desses números.

A diferença entre a média aritmética e a média harmônica dos números 4 e 6 é:
A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,4 E) 0,5

**36)** (OBM-04) Numa prova para uma sala com 30 alunos, a média aritmética das 10 piores notas é 3 e a média aritmética das 10 melhores notas é 9. O menor valor possível e o maior valor possível para a média da sala são, respectivamente:
A) 6 e 7 B) 5 e 7 C) 4 e 6 D) 3 e 9 E) 4 e 8

**37)** (OBM-03) A média de cinco inteiros positivos diferentes é 11. Determine o maior valor possível para o maior dos cinco inteiros.

**38)** (OBM-00) Listamos os inteiros de 1 a $n$. Desta lista apagamos o inteiro $m$. A média dos $n-1$ números restantes é $\frac{134}{11}$. Determine $n$ e $m$.

**39)** Mostre que $3a^4 - 4a^3b + b^4 \geq 0$, para todos os números reais $a$, $b$.

**40)** Mostre que se x é um número real não nulo, então $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$.

**41)** Se a, b e c são números reais positivos tais que $a + b + c = 1$, prove que $ab + bc + ca \leq 1/3$.

**42)** (OBM-10) Qual é o maior valor de $xy^2$ se $x$ e $y$ são reais positivos cuja soma é 3?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**43)** Sejam x e y números reais tais que $x + y = 1$. Mostre que $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$.

**44)** Se a, b e c são positivos e $a + b + c = 1$, então prove que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

**45)** Sendo a, b, c reais positivos tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, mostre que

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

**46)** Provar as desigualdades:
a) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$, a, b e c reais positivos;
b) $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq 2^n$, se $a_1.a_2\ldots a_n = 1$, $a_i \geq 0$.

# SISTEMA MÉTRICO

Ao longo do tempo o homem sempre se deparou com a necessidade de fazer medições. Um fazendeiro precisa saber a quantidade de leite que está vendendo para um cliente, um proprietário tem de ter meios para justificar que seu imóvel é mais caro que outro, pois o seu é "maior", uma dona de casa necessita saber o tamanho mínimo de fio para montar seu varal de secar roupas, etc. Observe que, para resolver os exemplos apresentados acima, basta uma base que sirva de comparação para que as medidas sejam mensuradas. Por exemplo, o fazendeiro pode usar um vasilhame para fazer as medidas de leite que cada comprador encomenda. João pode encomendar dois vasilhames, enquanto que Maria pode encomendar seis vasilhames. Assim, o fazendeiro deve cobrar de Maria o valor três vezes maior do que cobra de João. O proprietário do imóvel pode argumentar que o outro imóvel cabe algum número de vezes dentro do seu. A dona de casa pode dizer que precisa de 30 palmos (comprimento das extremidades do dedo mínimo e polegar de sua mão direita) de corda para armar seu varal. Observe que as soluções mostradas são possíveis, entretanto carecem de uma padronização. O palmo da dona de casa provavelmente é menor que o palmo do vendedor de corda. Assim como o vasilhame do fazendeiro deve ser de tamanho diferente do vasilhame usado pelo comprador para armazenar o leite.

De modo a padronizar as medidas alguns governantes passaram a adotar padrões que deveriam ser seguidos em seus domínios. Por exemplo, George III, que foi rei da Grã-Bretanha de 1760 até 1801, resolveu que as medidas de volume deveriam seguir o padrão de seu penico! O penico imperial foi então enviado para todas as regiões do reino e a ordem era que seu volume deveria ser utilizado para medir outros volumes. Chamada de galão, esta medida de volume é usada até hoje na medição da quantidade de tinta para pintar paredes. Em outra situação parecida, também na Inglaterra, no século XII o rei Henrique I fixou a jarda como sendo a distância entre seu nariz e o polegar de seu braço estendido.

As soluções adotadas por George III e Henrique I resolviam as medidas de volume e comprimento em seus reinos, entretanto outros governantes utilizavam outras medidas em seus reinos e com a intensificação do comércio mundial sentiu-se a necessidade de uma padronização maior, que servisse de padrão mundial. Em 1789, em plena Revolução Francesa, o Governo Republicano da França encomendou à Academia de Ciência de Paris, composta pelos maiores cientistas da época, um sistema unificado de medidas. Assim foi criado o Sistema Métrico Decimal, constituído de três unidades básicas: o metro (medida de comprimento), o litro (medida de volume) e o quilograma (medida de massa). O metro foi inicialmente definido como sendo a décima milionésima parte da quarta parte do meridiano terrestre que passa por Paris, ou seja, dividiu-se o comprimento do meridiano por 4.000.000. Para materializar o metro, construiu-se uma barra de

platina de secção retangular, com 25,3 mm de espessura e com 1 m de comprimento de lado a lado. O problema de utilizar uma barra metálica como padrão de comprimento é que esta é suscetível a variações de tamanho devido à dilatação ao ocorrer uma variação relativamente grande de temperatura. A partir de 1983 a definição de metro passou a ser mais precisa: Metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo igual a 1/299 792 458 de segundo.

Muitos países adotaram o sistema métrico decimal, inclusive o Brasil, aderindo à Convenção do Metro. Entretanto, apesar das qualidades inegáveis do Sistema Métrico Decimal - simplicidade, coerência e harmonia - não foi possível torná-lo universal. Além disso, o desenvolvimento científico e tecnológico passou a exigir medições cada vez mais precisas e diversificadas. Em 1960, o Sistema Métrico Decimal foi substituído pelo Sistema Internacional de Unidades - SI mais complexo e sofisticado que o anterior.

O Sistema Internacional de Unidades - SI foi sancionado em 1960 pela Conferência Geral de Pesos e Medidas e constitui a expressão moderna e atualizada do antigo Sistema Métrico Decimal, ampliado de modo a abranger os diversos tipos de grandezas físicas, compreendendo não somente as medições que ordinariamente interessam ao comércio e à indústria (domínio da metrologia legal), mas estendendo-se completamente a tudo o que diz respeito à ciência da medição.

## 4.1. COMPRIMENTO

A unidade fundamental de comprimento no sistema internacional de unidades é o metro, que já apresentou várias definições ao longo da história, como mencionado no texto anterior. O símbolo de metro é a letra m (sempre minúscula). Assim, para designar que uma grandeza x vale 27 metros, pode-se escrever x = 27 m.

Uma das grandes facilidades de utilização do metro como unidade de medida é a existência de uma grande quantidade de múltiplos e submúltiplos, que fazem com que valores relativamente muito maiores ou muito menores que um metro sejam descritos sem a utilização de potências de 10 na notação científica. Os múltiplos e submúltiplos no metro estão esquematizados abaixo:

| **Múltiplo ou submúltiplo** | **Símbolo** | **Valor** |
|---|---|---|
| Milímetro | (mm) | 0,001 m |
| Centímetro | (cm) | 0,01 m |
| Decímetro | (dm) | 0,1 m |
| Metro | (m) | 1 m |
| Decâmetro | (dam) | 10 m |
| Hectômetro | (hm) | 100 m |
| Quilômetro | (km) | 1000 m |

Por exemplo, se uma pessoa for medir a espessura de um aparelho celular certamente será encontrado um valor muito menor que um metro. Assim, é bem mais elegante escrever que a espessura do celular vale 1,7 mm do que escrever $1{,}7.10^{-3}$ m ou 0,0017 m.

Algumas unidades de comprimento que não pertencem ao sistema internacional de unidades ainda são utilizadas com alguma frequência. Abaixo segue uma tabela com estas unidades e quanto equivalem em metros.

| Unidade | Símbolo | Valor (unidades SI) |
|---|---|---|
| unidade astronômica | UA | $1{,}495978 \times 10^{11}$ m |
| parsec | pc | $3{,}085680 \times 10^{16}$ m |
| angstrom | Å | $10^{-10}$ m |
| milha marítima | | 1852 m |
| micron | m | $10^{-6}$ m |
| milha terrestre | mi | 1 609,3 m |
| jarda | yd | 0,9144 m |
| pé | ft | 0,30480 m |
| palmo | span | $22{,}86 \times 10^{-2}$ m |
| polegada | in | $2{,}540 \times 10^{-2}$ m |

### 4.1.1. Convertendo Unidades

A conversão de unidades de comprimento é realizada resolvendo uma regra de três simples. Os exemplos abaixo mostram como proceder:

1) Converter 12,6 quilômetros em centímetros

Inicialmente, observe que se 1 km = $10^3$ m e 1 m = $10^2$ cm então 1 km = $10^5$ cm

Logo: $\begin{matrix} 1 \text{ km} & \longrightarrow & 10^5 \text{ cm} \\ 12{,}6 \text{ km} & \longrightarrow & x \text{ cm} \end{matrix} \Rightarrow 1.x = 12{,}6.10^5 \Rightarrow x = 1.260.000 \text{ cm}$

2) Converter 25 metros em polegadas.

$\begin{matrix} 1 \text{ pol} & \longrightarrow & 0{,}0254 \text{ m} \\ x \text{ pol} & \longrightarrow & 25 \text{ m} \end{matrix} \Rightarrow 1.25 = x.0{,}0254 \Rightarrow x = 984{,}25 \text{ pol}$

## 4.2. ÁREA

A unidade de área do sistema internacional de unidades é o metro quadrado, simbolizado por $m^2$. Um metro quadrado é equivalente a um quadrado de lado igual a um metro. Analogamente ao caso do metro, também existem múltiplos de submúltiplos do metro quadrado:

| Múltiplo ou submúltiplo | Símbolo | Valor |
|---|---|---|
| Milímetro quadrado | ($mm^2$) | $10^{-6}$ $m^2$ |
| Centímetro quadrado | ($cm^2$) | $10^{-4}$ $m^2$ |
| Decímetro quadrado | ($dm^2$) | $10^{-2}$ $m^2$ |
| Metro quadrado | ($m^2$) | 1 $m^2$ |
| Decâmetro quadrado ou are | ($dam^2$ ou a) | $10^2$ $m^2$ |
| Hectômetro quadrado ou hectare | ($hm^2$ ou ha) | $10^4$ $m^2$ |
| Quilômetro quadrado | ($km^2$) | $10^6$ $m^2$ |

Algumas unidades de área, que não pertencem ao SI, ainda são utilizadas. Um exemplo é o alqueire, que equivale a 24200 $m^2$.

## 4.3. VOLUME

A unidade de volume no sistema internacional de unidades é o metro cúbico, cujo símbolo é $m^3$. Um metro cúbico é igual ao volume de um cubo de 1 metro de aresta. O metro cúbico também possui múltiplos de submúltiplos:

| Múltiplo ou submúltiplo | Símbolo | Valor |
|---|---|---|
| Milímetro cúbico | ($mm^3$) | $10^{-9}$ $m^3$ |
| Centímetro cúbico | ($cm^3$) | $10^{-6}$ $m^3$ |
| Decímetro cúbico | ($dm^3$) | $10^{-3}$ $m^3$ |
| Metro cúbico | ($m^3$) | 1 $m^3$ |
| Decâmetro cúbico | ($dam^3$) | $10^3$ $m^3$ |
| Hectômetro cúbico | ($hm^3$) | $10^6$ $m^3$ |
| Quilômetro cúbico | ($km^3$) | $10^9$ $m^3$ |

No caso do volume ocorre um fato único, não existente em outras grandezas: uma outra unidade, que não pertence ao SI, é mais utilizada que o metro cúbico. O litro, que é igual a $10^{-3}$ $m^3$, devido à sua imensa aplicação comercial, acaba por ser mais popular que o metro cúbico. Desde embalagens de produtos líquidos (água, refrigerante, leite, óleo, etc), até a medida da capacidade de recipientes (volume do tanque de combustível, volume de uma mala, volume de piscina, etc), a utilização do litro e do seu principal submúltiplo, o ml (mililitro, igual a $10^{-3}$ litros ou $10^{-6}$ metros cúbicos), já está enraizada no cotidiano. O símbolo do litro é $\ell$ e possui os mesmos múltiplos (mili, centi, deci) e submúltiplos (deca, hecto e quilo) das unidades do SI.

Outras unidades de volume ainda são utilizadas, principalmente nos países de língua inglesa:

| Unidade | Símbolo | Valor (unidades SI) |
|---|---|---|
| barril de petróleo | | $0,159\ m^3$ |
| galão americano | gal | $3,785.10^{-3}\ m^3$ |
| galão inglês | gal | $4,545963.10^{-3}\ m^3$ |
| pé cúbico | $ft^3$ | $0,028317\ m^3$ |
| polegada cúbida | $in^3$ | $0,00001639\ m^3$ |

## 4.4. ÂNGULO

### 4.4.1. Radianos

No sistema internacional de unidades o ângulo é medido em radianos, que é definido como o arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido. Assim, para medir quanto mede um determinado ângulo em radianos basta calcular a razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência. Por exemplo, em uma circunferência de raio igual a 5 metros, o valor do ângulo definido por um arco $\overset{\frown}{AB}$ de comprimento igual a 12 metros é igual a $\frac{\overset{\frown}{AB}}{R} = \frac{12}{5} = 2,4$ radianos.

Sabe-se que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é constante e é igual a um número irracional denominado $\pi$ (letra grega pi). O número $\pi$, apesar de ser um número irracional, pode ser razoavelmente aproximado a 3,1416. Logo, a medida do ângulo definido por uma volta completa na circunferência vale $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ radianos.

### 4.4.2. Graus

Outra unidade bastante utilizada na medida de ângulos é o grau. Um grau é definido com o arco de circunferência cujo comprimento é igual à $\frac{1}{360}$ da circunferência. Deste modo, uma volta completa na circunferência equivale a 360 graus. O símbolo de grau é °, ou seja, 35 graus pode ser representado por 35°.

As subunidades dos graus são os minutos (simbolizado por ') e segundos (simbolizado por "), onde 1° = 60' e 1' = 60". Por exemplo, a medida de um determinado ângulo pode ser dada por 1° 23' 17", onde lê-se 1 grau 23 minutos e 17 segundos. Observe que o valor máximo que pode assumir os minutos de um ângulo é 59, bem como o valor máximo que pode assumir os segundos de um ângulo é também 59. Assim, se for informado um determinado valor de minuto ou

segundo superior a 59 então deve-se fazer a conversão para a unidade ou subunidade acima. Observe os exemplos abaixo:

1) Suponha que seja informado que um ângulo vale 134'.
Dividindo por 60: 134 = 2.60 + 14.
Assim, tem-se que 134' = 2° 14'.

2) Para escrever corretamente 5671" deve-se notar que 5671 = 60.94 + 31, ou seja, 5671" = 94' 31".
Analogamente, como 94 = 1.60 + 34, então tem-se que 5671" = 1° 34' 31"

Em algumas oportunidades, os ângulos são dados em valores decimais de graus. A conversão de uma unidade para sua subunidade é feita multiplicando por 60 o valor decimal, lembrando que 1° = 60' e 1' = 60". Exemplos:

1) Para converter 50,15° em suas subunidades basta fazer 50,15° = 50° + 0,15° =
= 50° + 60.0,15' = 50° 9'

2) Em alguns casos é necessário converter até em segundos:
24,7825° = 24° + 0,7825° = 24° + 60.0,7825' = 24° + 46,95' = 24° + 46' + 0,95' =
= 24° + 46' + 60.0,95" = 24° + 46' + 57" = 24° 45' 57"

### 4.4.3. Convertendo unidades

Para converter de radianos para graus ou de graus para radianos basta resolver uma regra de três bastante simples:

| | | |
|---|---|---|
| $2\pi$ | $\longrightarrow$ | $360°$ |
| medida em radianos | $\longrightarrow$ | medida em graus |

Por exemplo, para converter $\pi/3$ radianos em graus tem-se:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \longrightarrow & 360° \\ \frac{\pi}{3} & \longrightarrow & x \end{array} \Rightarrow 2\pi.x = \frac{\pi}{3}.360° \Rightarrow x = 60°$$

Para converter 135° em radianos:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \longrightarrow & 360° \\ x & \longrightarrow & 135° \end{array} \Rightarrow 2\pi.135° = x.360° \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \text{ radianos}$$

## 4.5. TEMPO

No sistema internacional de unidades a unidade de tempo é o segundo, simbolizado pela letra s. Assim, 29 segundos são representados por 29 s. Um segundo já teve várias definições no passado, mas desde 1960 um segundo é definido como o tempo que o átomo do Césio 133 demora para executar 9.192.631.770 oscilações.

Outras unidades também são bastante usadas para a medição do tempo: minutos (min), horas (h) e dias. Um minuto é igual ao conjunto de 60 segundos. Uma hora é igual ao conjunto de 60 minutos. Um dia é definido como o conjunto de 24 horas. Para converter entre segundos, minutos, horas e dias basta seguir a tabela abaixo:

| Relação | Convertendo de | Para | Operação |
|---|---|---|---|
| 24 horas = 1 dia | horas | dias | Dividir por 24 |
| 60 minutos = 1 hora | minutos | horas | Dividir por 60 |
| 60 segundos = 1 minuto | segundos | minutos | Dividir por 60 |
| 1 minuto = 60 segundos | minutos | segundos | Multiplicar por 60 |
| 1 hora = 60 minutos | horas | minutos | Multiplicar por 60 |
| 1 dia = 24 horas | dias | horas | Multiplicar por 24 |

Os exemplos abaixo mostram como fazer conversões entre as unidades de tempo.

1) Converter 1 dia em segundos:
1 dia = 24 horas = 24.60 minutos = 1440 minutos = 1440.60 segundos =
= 86400 segundos

2) Converter 10080 minutos em dias:
10080 minutos = 10080/60 horas = 168 horas = 168/24 dias = 7 dias

3) Converter 3 h 20 min em segundos:
3 h 20 minutos = 3.60 minutos + 20.60 segundos = 180 minutos + 1200 segundos =
= 180.60 segundos + 1200 segundos = 10800 segundos + 1200 segundos = 12000 segundos

Além do segundo, minuto, hora e dia, outras unidades também são usadas na medida do tempo. A tabela abaixo mostra algumas delas:

| Unidade | Equivalente a |
|---|---|
| Semana | 7 dias |
| Quinzenas | 15 dias |
| Mês | 30 dias |
| Bimestre | 2 meses |
| Trimestre | 3 meses |
| Quadrimestre | 4 meses |
| Semestre | 6 meses |
| Ano | 12 meses |
| Década* | 10 anos |
| Século | 100 anos |
| Milênio | 1000 anos |

*Na verdade, um período aleatório de 10 anos se chama **decênio**. Década é definido com o período compreendido entre 1° de janeiro de algum ano terminado em 1, por exemplo 1921, e 31 de dezembro do próximo ano terminado em 0, no exemplo citado é 1930. A mesma definição vale para século e milênio. O último século iniciou em 1° de janeiro de 901 e terminou em 31 de dezembro de 2000.

## 4.6. MASSA

A unidade de medida de massa no sistema internacional de unidade é o quilograma. Um quilograma é igual à massa de um objetivo cilíndrico formado por irídio e platina, que está localizado no escritório internacional de pesos e medidas, na cidade de Sèvres, na França, desde 1889.

A tabela abaixo mostra os múltiplos e submúltiplos do quilograma:

| Nome | Símbolo | Equivalente a |
|---|---|---|
| grama | g | $10^{-3}$ quilogramas |
| nanograma | ng | $10^{-12}$ quilogramas ou $10^{-9}$ gramas |
| microgrma | μg | $10^{-9}$ quilogramas ou $10^{-6}$ gramas |
| miligrama | mg | $10^{-6}$ quilogramas ou $10^{-3}$ gramas |
| centigrama | cg | $10^{-5}$ quilogramas ou $10^{-2}$ gramas |
| decigrama | dg | $10^{-4}$ quilogramas ou $10^{-1}$ gramas |
| decagrama | dag | $10^{-2}$ quilogramas ou $10^{1}$ gramas |
| hectograma | hg | $10^{-1}$ quilogramas ou $10^{2}$ gramas |
| megagrama | Mg | $10^{3}$ quilogramas ou $10^{6}$ gramas |
| gigagrama | Gg | $10^{6}$ quilogramas ou $10^{9}$ gramas |
| teragrama | Tg | $10^{9}$ quilogramas ou $10^{12}$ gramas |

A conversão de unidades de massa é feita resolvendo uma regra de três simples, usando o mesmo procedimento da conversão de unidades de comprimento e ângulos, já apresentados neste capítulo.

Outras unidades, que não pertencem ao sistema internacional de unidades ainda são usadas.

| Nome | Símbolo | Equivalente a |
|---|---|---|
| libra | lb | 453,59237 gramas |
| onça | oz | 28,35 gramas |
| arroba | | 15 quilogramas |
| dracma | dr | 1,772 gramas |
| quilate | | 0,2 gramas |

## 4.7. CONVERSÃO ENTRE UNIDADES COMPOSTAS

Nos tópicos anteriores foi possível analisar como é realizada a conversão entre unidades das grandezas fundamentais (comprimento, área, volume, ângulo, tempo e massa). Entretanto, outras grandezas derivadas das grandezas fundamentais também possuem grande importância, tais como velocidade, força, pressão, vazão, energia, potência, ... A unidade de cada uma destas grandezas, em geral, é descrita em função das unidades fundamentais. Por exemplo, a unidade de velocidade no SI é dada por metros por segundo, cujo símbolo é m/s. A unidade de força é o Newton (N), que escrito em função das unidades fundamentais fica da forma 1 N = 1 kg.m/s$^2$.

A conversão entre as unidades destas grandezas derivadas é feita convertendo cada grandeza fundamental presente na unidade da grandeza derivada. Os exemplos abaixo mostram como é feita a conversão.

### Exercícios Resolvidos

1) Converter a velocidade de 72 km/h (quilômetros por hora) para m/s (metros por segundo).

**Solução:**

Sabendo que 1 km = 1000 m e que 1 h = 3600 s então:

$$72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\ \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = \frac{72\times 1000}{3600}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2) No sistema internacional de unidades o valor da aceleração da gravidade é, aproximadamente, 10 m/s$^2$. Converta este valor para ft/min$^2$.

**Solução:**

Inicialmente, note que se 1 ft = 0,3048 m então 1 m = 3,28 ft

$$10\ \frac{m}{s^2} = 10\ \frac{3{,}28\ ft}{(1/60\ min)^2} = 10 \times 3{,}28 \times 3600\ \frac{ft}{min^2} = 118080\ \frac{ft}{min^2}$$

**3)** A densidade da água, em unidades do SI, é igual a 1000 kg/m³. Converta este valor para g/cm³.

**Solução:**

$$1000\ \frac{kg}{m^3} = 1000\ \frac{1000\ g}{(100\ cm)^3} = \frac{1000 \times 1000}{(100)^3}\ \frac{g}{cm^3} = 1\ \frac{g}{cm^3}$$

**4)** Nos postos de gasolina a unidade usada nos instrumentos para calibrar a pressão do pneu é denominada de psi. Um psi é igual a uma libra-força por polegada quadrada. Sabe-se que uma libra-força (Lb) é igual a 4,448 Newtons (N) e que uma polegada (pol) é igual a 0,0254 metros (m). Suponha que o pneu de um carro foi calibrado com 30 psi. Calcule o valor da pressão no pneu em N/m².

**Solução:**

$$30\frac{Lb}{pol^2} = 30\frac{Lb}{pol^2} \cdot \frac{4{,}448\ N}{1\ Lb} \cdot \frac{(1\ pol)^2}{(0{,}0254\ m)^2} = 30\frac{4{,}448\ N}{(0{,}0254)^2 m^2} = 206832{,}4\frac{N}{m^2}$$

**5)** (ENEM-11) Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros voos.

Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas voos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 21 abr. 2010 (adaptado).

Considere que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés.

Qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos?

a) 3390 pés. b) 9390 pés. c) 11200 pés. d) 19800 pés. e) 50800 pés.

**Solução: Alternativa C**

Como 1 m = 3,3 pés: $h_1 = 6000\ m = 6000\ \cancel{m}\ \frac{3{,}3\ pés}{1\ \cancel{m}} = 6000.3{,}3\ pés = 19800\ pés$

Logo, a diferença de alturas, em pés, vale: $h_2 - h_1 = 31000 - 19800 = 11200$ pés

**6)** (ENEM-16) Uma caixa-d'água em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 4 m de comprimento, 3 m de largura e 2 m de altura, necessita de higienização. Nessa operação, a caixa precisará ser esvaziada em 20 min, no máximo.

A retirada da água será feita com o auxílio de uma bomba de vazão constante, em que vazão é o volume do líquido que passa pela bomba por unidade de tempo.

A vazão mínima, em litro por segundo, que essa bomba deverá ter para que a caixa seja esvaziada no tempo estipulado é

a) 2. b) 3. c) 5. d) 12. e) 20.

**Solução: Alternativa E**

O volume da caixa d'água é $V = 4.3.2 = 24\ m^3$

Convertendo para litros: $V = 24\ m^3 = 24\ \cancel{m^3}\ \dfrac{1000\ \text{litros}}{1\ \cancel{m^3}} = 24000\ \text{litros}$

Convertendo 20 minutos em segundos:

$t = 20\ \text{minutos} = 20\ \cancel{\text{minutos}}\ \dfrac{60\ \text{segundos}}{1\ \cancel{\text{minuto}}} = 1200\ \text{segundos}$

Assim, a vazão, em litros por segundos, vale:

$$Z = \frac{V}{t} = \frac{24000\ \text{litros}}{1200\ \text{segundos}} = 20\ \frac{\text{litros}}{\text{segundos}}$$

7) (ENEM-14) O criador de uma espécie de peixe tem sete tanques, sendo que cada tanque contém 14 600 litros de água. Nesses tanques, existem em média cinco peixes para cada metro cúbico ($m^3$) de água. Sabe-se que cada peixe consome 1 litro de ração por semana. O criador quer construir um silo que armazenará a ração para alimentar sua criação.

Qual é a capacidade mínima do silo, em litros, para armazenar a quantidade de ração que garantirá a alimentação semanal dos peixes?

a) 511 b) 5 110 c) 51 100 d) 511 000 e) 5 110 000

**Solução: Alternativa A**

7 tanques com 14600 litros de água cada são $7 \times 14600$ litros = 102200 litros

Convertendo para $m^3$: $102200\ \text{litros} = 102200\ \text{litros}\dfrac{1\ m^3}{1000\ \text{litros}} = 102,2\ m^3$

Como são 5 peixes por $m^3$, pode-se calcular o número total de peixes:

$$5\ \frac{\text{peixes}}{m^3} = \frac{n}{V} \Rightarrow 5\ \frac{\text{peixes}}{m^3} = \frac{n}{102,2\ m^3} \Rightarrow n = 511\ \text{peixes}$$

Como cada peixe consome 1 litro de ração por semana:

$$1\ \frac{\text{litro}}{\text{peixe}} = \frac{V}{n} \Rightarrow 1\ \frac{\text{litro}}{\text{peixe}} = \frac{V}{511\ \text{peixes}} \Rightarrow V = 511\ \text{litros}$$

## Exercícios propostos

1) (ESSA-75) Dividindo o ângulo de 32° em 6 partes iguais, obtemos:
(A) 5°30' (B) 6°20' (C) 4°20' (D) 5°20'

2) (ESSA-77) Um reservatório tem a forma de um paralelepípedo retângulo e suas medidas são 5 metros de comprimento, 3 metros de largura e 2 metros de profundidade. Sua capacidade é de:
(A) 30.000 litros (B) 3.000 litros (C) 300 litros (D) 30 litros

3) (ESSA-77) O ângulo de 2° 8'25" equivale a:
(A) 9.180" (B) 2.825" (C) 625" (D) 7.705"

4) (ESSA-77) Sob a forma mais simples a razão de 3h 20min para 5h é:
(A) $\frac{23}{5}$ (B) $\frac{3,2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$

5) (ESSA-78) 11) Em metros, o resultado da expressão
1,8 dam + 56,8 cm + 3/4 hm é:
(A) 935,68 (B) 0,93568 (C) 93,568 (D) 9,3568

6) (ESSA-78) 56,308 $m^3$ equivale a:
(A) 563,08 $dm^3$ (B) 56,308 dl (C) 0,056308 litros (D) 56,308 litros

7) (ESSA-78) O suplemento do ângulo de 63° 40"é:
(A) 116°59'20" (B) 26°20" (C) 116°20" (D) 26°59'20"

8) (ESSA-79) Transformando 32,7 ha, obtém-se:
(A) 327 $m^2$ (B) 327.000 $dam^2$ (C) 3.270 $dam^2$ (D) 32,70 $m^2$

9) (ESSA-79) Um tanque recebe 0,04 hl de água por min. Ao final de 4 horas, a medida do volume de água contida no tanque é:
(A) 960$m^3$ (B) 960 $dm^3$ (C) 9,6 $dm^3$ (D) 96 $m^3$

10) (ESSA-79) Efetuando 14° 28' + 15° 47" + 38° 56' 23", encontramos:
(A) 67°24'10" (B) 68°25'10" (C) 68°24'10" (D) 67°25'10"

**11)** (ESSA-80) Calculando $\frac{3}{4}$ de 4h 30 min 20s, obtemos:

a) 3h 15 min 30s b) 15 h 30 min 30s c) 15h 31 min d) 3 h 22 min 45 s

**12)** (ESSA-80) Uma superfície de $3km^2$ é igual a:

(A) 3 ha (B) 30 ha (C) 3.000 ha (D) 300 ha

**13)** (ESSA-81) Sendo A = 33° 53'41" e B = 14° 12'49", o resultado da operação A – B é:

(A) 19° 41'52" (B) 19° 41'08" (C) 19° 40'52" (D) 19° 40'08"

**14)** (ESSA-82) O volume da caixa d'água de uma Unidade é 12 $m^3$. Estando a caixa cheia e gastando cada homem 10 litros d'água num banho, podem banhar-se portanto:

a) 12.000 homens b) 120 homens c) 1.200 homens d) 120.000 homens

**15)** (ESSA-82) O ângulo cujos $\frac{3}{5}$ medem 15°09'21" é:

(A) 75°46'45" (B) 25°15'35" (C) 45°27'63" (D) 9°5'36,6"

**16)** (ESSA-83) O resultado da expressão 3,7 km + 0,8 hm + 425 cm, em decâmetros é:

(A) 378,425 (B) 382,25 (C) 450,425 (D) 45,425

**17)** (ESSA-84) Sabendo que 1 litro = 1 $dm^3$, expresse 250.000 ml em $m^3$.

(A) 2,5 (B) 0,025 (C) 25 (D) 0,25

**18)** (ESSA-84) O complemento de um ângulo de 32° 15'10" vale:

(A) 147°44'50" (B) 57°44'50" (C) 57°45' (D) 12°44'50"

**19)** (ESSA-85) Uma indústria produz 900 litros de óleo por dia, que devem ser embalado em latas de 30 $cm^3$. Para isso serão necessárias:

(A) 300 latas (B) 3.000 latas (C) 30.000 latas (D) 300.000 latas

**20)** (ESSA-86) Se adotarmos como unidade de área um quadrado de 3m de lado, teremos em 0,0027 $km^2$ um total de unidades igual a:

(A) 300 (B) 400 (C) 500 (D) 600 (E) 700

**21)** (ESSA-87) Um comerciante possui 13 hl de vinho e deseja guardá-lo num tonel cilíndrico, cuja base tem área de $2m^2$. A altura do tonel deverá ser de:

(A) 13 cm (B) 0,65 cm (C) 0,42 cm (D) 42 cm (E) 65 cm

**22)** (ESSA-87) 3,5 $m^3$ de um metal pesam 21,7 toneladas. O peso de um bloco de 180 $dm^3$ deste mesmo metal será igual a:
(A) 6,2 ton (B) 1.116 kg (C) 621 kg
(D) 61,12 kg (E) 29,03 ton

**23)** (ESSA-87) Efetuando 42°15'29" - 20°42'20" , encontramos:
(A) 20°33'09" (B) 22°18'17" (C) 22°28'07"
(D) 21°33'09" (E) 23°15'29"

**24)** (ESSA-88) Uma indústria farmacêutica importa 600 litros de uma vacina e vai comercializá-la em ampolas de 25 $cm^3$. O número total de ampolas será de:
(A) 20.000 (B) 25.000 (C) 24.000
(D) 30.000 (E) 18.000

**25)** (ESSA-89) Se adotarmos como unidade de comprimento uma régua de 20 cm, teremos em 40 dam, um total de unidades igual a:
(A) 2 (B) 20 (C) 200 (D) 2.000 (E) 20.000

**26)** (ESSA-90) O som percorre 340 m em cada segundo. Em 1 minuto, ele percorre:
(A) 2.040 m (B) 20,4 m (C) 204 km
(D) 204 m (E) 20,4 km

**27)** (CM BH-13) Massa é a medida da quantidade de matéria que um corpo possui. o quilograma (kg) é a unidade de massa padrão oficial e está representado por uma peça de platina que se encontra no Museu Internacional de Pesos e Medidas, na cidade de Serves, na França. O grama (g) é a unidade de referência. Conforme a massa do corpo calculado, podemos utilizar os múltiplos e os submúltiplos. Expresse o resultado em gramas:

3,12 kg + 3,12 g + 3,12 hg + 3,12 dg + 3,12 dag + 3,12 mg + 3,12 cg

a) 3.466.666,32 b) 3,46666632 c) 21,84
d) 3.466,7 e) 3.466,66632

**28)** (ESSA-00) A transformação de 9° em segundos é:
[A] 540" [B] 22400" [C] 32400" [D] 3600" [E] 100"

**29)** (CM Fortaleza-07) José chegou ao aeroporto às 8 horas e 11 minutos. O avião, no qual embarcou, partiu às 11 horas e 53 minutos. O tempo em que José ficou no aeroporto foi de:
a) 13320 segundos. b) 1332 segundos. c) 2220 segundos
d) 222 segundos. e) 9000 segundos

**30)** (CM Manaus-09) Um carpinteiro quer dividir, em partes iguais, três vigas, cujos comprimentos são, respectivamente, 3 m, 42 dm, e 0,0054 km, devendo a medida de cada um dos pedaços ser a maior possível. A medida de cada uma das partes é:
a) 10 m b) 0,15 km c) 5 dm d) 60 cm e) 5000 mm

**31)** (CM Manaus-09) Uma distribuidora de bebidas vendeu 15 caixas de suco de uva em garrafas de 1,5 $dm^3$. Se cada caixa contém 20 garrafas de suco, a quantidade de litros de suco vendida foi de:
a) ( ) 300 b) ( ) 450 c) ( ) 4500 d) ( ) 3000 e) ( ) 150

**32)** (CM Manaus-10) No mês de agosto, foram consumidos 9.375 litros de suco na cantina do Colégio Militar de Manaus. O suco é vendido em copos de 300 ml. Levando em conta que cada aluno consumiu, em média, 25 copos durante o mês, então existem no colégio:
A) 900 alunos B) 1.250 alunos C) 1.230 alunos
D) 1.280 alunos E) 1.270 alunos

**33)** (CM Manaus-10) Um reservatório, contendo 200 litros de água, está sendo esvaziado por meio de uma torneira cuja vazão é de 200 $cm^3$ por minuto. O tempo necessário para esvaziar completamente o reservatório, em minutos, é:
A) 1 B) 10 C) 100 D) 1 000 E) 0,1

**34)** (CM Manaus-10) Um avião fez o percurso entre Belém-PA e Brasília-DF em 2 horas, 22 minutos e 35 segundos. Se ele chegou a Brasília às 10 horas da manhã, o seu horário de partida de Belém foi:
A) 6 horas, 38 minutos e 35 segundos
B) 6 horas, 37 minutos e 25 segundos
C) 7 horas, 38 minutos e 35 segundos
D) 7 horas, 22 minutos e 25 segundos
E) 7 horas, 37 minutos e 25 segundos

**35)** (CM Fortaleza-13) A distância de Fortaleza a Aracaju é de 1.260 quilômetros. Um automóvel percorre 12 quilômetros com um litro de gasolina. Se um motorista, partindo de Fortaleza, utilizar este automóvel, qual a quantidade mínima de gasolina necessária para chegar a Aracaju?
(a) 15 $\ell$. (b) 105 da$\ell$. (c) 150 d$\ell$. (d) 1.050 m$\ell$. (e) 10.500 c$\ell$.

**36)** (CM RJ-07) Babilônia tornara-se a escola mais afamada do mundo. Jovens de todas as partes tentavam se tornar alunos dessa fantástica escola e o teste para nela ingressar continuava sendo uma partida de xadrez. Um candidato, chamado William, ficou famoso, pois foi o que mais rapidamente venceu uma partida.

Sabendo-se que a partida que ele disputou começou à zero hora do dia 15 e que 4/11 do tempo que restou para terminar o mesmo dia é igual ao tempo de duração da partida, determine quanto tempo durou essa partida.
a) 4 h e 48 min b) 6 h e 24 min c) 8 h e 12 min
d) 8 h e 40 min e) 9 h e 20 min

37) (CM RJ-03) Calcule o valor simplificado da expressão:

$$2 \times (1{,}2 \text{ hm} + 6\,000 \text{ cm} - 2 \times 0{,}4 \text{ dam}) - 0{,}002 \text{ km}$$

A) 34,2 dam. B) 342 km. C) 3,6 hm. D) 360 m. E) 3 580 dm.

38) (CM RJ-09) O número de troncos de árvores (de 3 $m^3$ de volume cada) que foram necessários derrubar para fazer os palitos de fósforos (de 200 $mm^3$ de volume cada), que estão em 1200 contêineres, cada um com 12000 pacotes de 10 caixas com 40 palitos cada é:
(A) 1152 (B) 876 (C) 576 (D) 384 (E) 288

39) (CM RJ-09) Um caminhão vai ser carregado com 109 sacos de batata com 45 kg cada um. Se o peso do caminhão é 3 t, qual será o peso do caminhão com a carga?
(A) 79,05 t (B) 790,5 kg (C) 7.905 kg (D) 7,905 t (E) 79,05 kg

40) (CM Brasília-17) Uma imagem digital, capturada por uma câmera fotográfica, é formada por pontos chamados pixels. Nas câmeras modernas, a resolução das imagens é dada em megapixels, unidade que representa um milhão de pixels. As informações sobre cada um desses pixels são armazenadas, em geral, em 3 bytes. Usando uma câmera de um iPhone 6s com 12 megapixels de resolução, Maria Luíza fotografou 50 imagens em uma viagem que fez a Pirenópolis. Considerando que 1 KB (quilobyte) = $10^3$ bytes, 1 MB (megabyte) = $10^3$ KB, 1 GB (gigabyte) = $10^3$ MB e que Maria Luíza deseja armazenar as imagens em um pendrive, então a capacidade de memória desse pendrive deve ser, no mínimo, igual a
a) 512 MB b) 700 MB c) 900 MB d) 1 GB e) 1,8 GB

41) (CM Salvador-08) Uma caixa em forma de paralelepípedo, com dimensões da base 60 cm x 80 cm e altura 1m, está completamente cheia de água. Uma pedra em formato de cubo de 30 cm de aresta é colocada dentro desta caixa. A quantidade de água que fica na caixa é:
a) 427 litros b) 441 litros c) 453 litros d) 480 litros e) 507 litros

42) (CM Salvador-08) Considerando que um litro de petróleo pesa 0,8 kg e um tanque cúbico de 80 cm de aresta está com 3/4 de sua capacidade com petróleo, o peso do petróleo do tanque é:
a) 307,2 kg b) 310,8 kg c) 384,0 kg d) 448,0 kg e) 512,0 kg

**43)** (CM Salvador-09) Tiago ganhou um aquário em forma de paralelepípedo, com 40 cm de comprimento, 20 cm de largura e 30 cm de altura e pretende completar com água até 3/4 da sua capacidade. Para isso conseguiu um copo com capacidade para 0,2 L. Quantos copos cheios Tiago deverá usar para colocar a água que pretende no aquário?
(A) 36 (B) 900 (C) 48 (D) 120 (E) 90

**44)** (CM Salvador-10) Vinte pacotes de papel são empilhados um sobre os outros. Cada pacote tem 500 folhas e cada folha tem 0,15mm de espessura. O papel utilizado para a embalagem de cada pacote tem 0,5mm de espessura. Desta forma, a medida da altura da pilha desses vinte pacotes é
(A) 1m (B) 1,15m (C) 1,51m (D) 1,52m (E) 2,35m

**45)** (CM Salvador-10) Teresa comprou 154 dam de fita do Senhor do Bomfim e deseja reparti-la em pedaços de 250 mm, logo ela obterá:
a) 616 pedaços b) 6160 pedaços c) 6600 pedaços
d) 60160 pedaços e) 60610 pedaços

**46)** (CM Salvador-10) Uma mistura possui 25.819.000 $cm^3$ de água e 3815,75 $m^3$ de álcool. A quantidade de litros dessa mistura é:
a) 29634,75 b) 38415,69 c) 296347,5 d) 2963475 e) 3841569

**47)** (CM Salvador-10) Marcos foi a uma "Lan House" e contratou 2 horas de acesso à internet. Iniciou às 13h40min e terminou às 15h06min. O tempo que sobrou como crédito para Marcos utilizar da próxima vez em que retornar à "Lan House" foi de:
(A) 14 min (B) 34 min (C) 56 min (D) 1h 14min (E) 1h 26min

**48)** (CM Santa Maria-05) No CMSM há 6 aulas todos os dias. Elas começam às 7h 30min, duram 45 minutos cada uma, havendo um recreio de 20 minutos de duração entre as 3ª e 4ª aulas, e um intervalo de 5 minutos entre a 4ª e a 5ª aula. A que horas começa a 5ª aula?
a) 10h 30min. b) 10h 20min. c) 10h 15min. d) 10h 55min. e) 11h 05min.

**49)** (CM Santa Maria-05) Um botijão de gás tem volume interno de 13,5 $m^3$. Consome-se por dia 500 $dm^3$ de gás. Quantos dias irá durar esse botijão de gás?
a. ( ) 20 b. ( ) 22 c. ( ) 24 d. ( ) 25 e. ( ) 27

**50)** (CM Santa Maria-07) Milton Neves, professor de Educação Física do CMSM, viajou de carro no dia 15 de julho para o Rio de Janeiro, que fica a 1.800km de Santa Maria, para assistir aos jogos do Pan-americano. Lá ficou hospedado na casa do Cel Francisco, ex-comandante do CMSM, localizada a 20km do parque aquático

Maria Lenke. Neste parque foram realizadas as provas de natação numa piscina de 50m de comprimento, 25m de largura e 2m de profundidade.
O volume, em litros, da piscina onde foi realizada a prova de natação, é de:
( a )2.500.000 litros ( b )2.600.000 litros ( c )2.700.000 litros
( d )3.000.000 litros ( e )3.500.000 litros

**51)** (CM Santa Maria-08) Leia o fragmento de texto abaixo. "O Jardim Botânico do Rio de Janeiro foi criado em 13/06/1808 por D. João VI e tinha como finalidade a pesquisa, a conservação da biodiversidade e a preservação do meio ambiente. Possui, hoje, uma área total de 137 hectares, dos quais, 55 hectares são cultivados. Atualmente, o Jardim Botânico recebe cerca de 400 mil visitantes por ano. Ele funciona diariamente e o valor da entrada é de R$ 4,00 por pessoa."
Considerando que 1 hectare corresponde a 10.000 $m^2$, a área em quilômetros quadrados da parte cultivada é de:
a) 0,65 $Km^2$. b) 1,37 $Km^2$. c) 550.000 $Km^2$. d) 0.55 $Km^2$. e) 820.000 $Km^2$.

**52)** (CM Santa Maria-09) Sem contar o nosso Sol, a estrela mais próxima da Terra fica em torno de 38.000.000.000.000 km de distância. Existem estrelas que estão bilhões de vezes mais longe que isso. Para evitar números grandes como esse, os astrônomos criaram uma unidade de medida para medir distâncias astronômicas, o "anoluz" que corresponde a distância percorrida pela luz em 1 ano. Sabendo que a luz viaja 300 mil km em 1 (um) segundo. Qual dos produtos abaixo representa a distância de 1 (um) ano-luz?
( a ) 300 000 x 60 x 60 x 24 x 365 km ( b ) 300 000 x 50 x 60 x 20 x 365 km
( c ) 300 000 x 50 x 60 x 20 x 265 km ( d ) 300 000 x 40 x 40 x 20 x 365 km
( e ) 300 000 x 10 x 10 x 30 x 40 km

**53)** (CM Santa Maria-09) O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), através de imagens de satélites, calcula áreas desmatadas na Amazônia Legal. Sabendo que 1 cm da imagem obtida pelo satélite corresponde a 100.000cm da imagem real, calcule a área desmatada em $km^2$, representada pelo satélite com um retângulo cujas dimensões são de 3cm de comprimento por 2cm de largura, qual a área desmatada em $km^2$?
( a ) 4. ( b ) 5. ( c ) 6. ( d ) 7. ( e ) 8.

**54)** (CM Santa Maria-09) Durante a primeira viagem do homem a Lua foram utilizados 2.700.000 kg (dois milhões e setecentos mil quilogramas) de combustível. Supondo que o combustível foi armazenado em um tanque em formato de paralelepípedo de dimensões 10m x 18m x 20m, qual é, em litros, o volume do tanque de combustível?
a) 360. b) 3.600. c) 36.000. d) 3.600.000. e) 36.000.000.

55) (Colégio Naval-89) Considere as 5 afirmações abaixo. A seguir, coloque (V) ou (F) nos parênteses, conforme sejam verdadeiras ou falsas.

I- (  ) 2,4h = 2h 40 min

II- (  ) $\frac{6}{5}$ km = 1200 dm

III- (  ) 0,2 $dm^2$ = 2 $m^2$

IV- (  ) 5$\ell$ = 5000 $cm^3$

V- (  ) $\sqrt[3]{0,008}$ $m^2$ = 2000 $cm^2$

Pode-se concluir que são verdadeiras apenas as afirmações:

(A) I e V  (B) III e IV  (C) II, IV e V

(D) IV e V  (E) I e II

56) (Colégio Naval-01) Suponha que 1 (um ) naval (símbolo **n** ) seja a medida de um ângulo convexo, menor que um ângulo reto, inscrito em um círculo de raio r. Assim sendo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a :

A) $\pi n/4$  B) $\pi n/2$  C) $\pi n$  D) $2\pi n$  E) $4\pi n$

57) (EPCAr-02) Em condições ambiente, a densidade do mercúrio é de aproximadamente 13g/$cm^3$. A massa desse metal, do qual um garimpeiro necessita para encher completamente um frasco de meio litro de capacidade é igual a

a) 260 g  b) 2,6 kg  c) 650 g  d) 6,5 kg

58) (EPCAr-08) Um vinhedo de forma retangular medindo 2 hm de comprimento e 9 dam de largura produziu 100 pipas totalmente cheias de vinho com a capacidade de 0,25 $m^3$ cada uma. Considere que

- este vinho foi vendido a R$ 1.600,00 o hl;
- o aluguel do vinhedo é de R$ 40.000,00 por 10.000$m^2$ ; e
- as despesas com a produção do vinho totalizam R$ 78.000,00

Com base nessas informações, é correto afirmar que

a) o aluguel do vinhedo é inferior a R$ 70.000,00

b) o lucro líquido do vinhateiro é um valor, em reais, cuja soma dos algarismos é maior que 7

c) a produção de 1 $m^2$ foi de $0,13\overline{8}$ dal

d) a despesa total do vinhateiro representa menos de 35% da receita.

59) (FGV-09) O volume de um cubo, em $m^3$, é numericamente igual a sua área total, em $cm^2$. Assim, a aresta desse cubo, em cm, é igual a

A) $6.10^{-6}$.  B) $5.10^{-1}$.  C) $6.10^{1}$.  D) $5 \cdot 10^{6}$.  E) $6 \cdot 10^{6}$.

**60)** (ENEM-12) Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3' 0" a leste do Meridiano de Greenwich.
Dado: 1° equivale a 60' e 1' equivale a 60".

PAVARIN, G. Galileu, fev. 2012 (adaptado)

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é

a) 124,02°. b) 124,05°. c) 124,20°. d) 124,30°. e) 124,50°.

**61)** (ENEM-12) A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso dei Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área. Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.
Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

a) 8 b) 80 c) 800 d) 8000 e) 80000

**62)** (Unifor-11) Um determinado CD de música de forró contém apenas três músicas gravadas. Segundo a ficha desse CD, os tempos de duração das gravações das três músicas são, respectivamente, 16:42 (dezesseis minuto e quarenta e dois segundos), 13:34 (treze minutos e trinta e quatro segundos) e 21:50 (vinte e um minuto e cinquenta segundos). Então, podemos afirmar que o tempo total de gravação desse CD é de:

(A) 51:06 (B) 51:26 (C) 51:56 (D) 52:06 (E) 52:26

**63)** (Unesp-92) O intervalo de tempo de 2,4 minutos equivale, no Sistema Internacional de unidades (SI), a:

a) 24 segundos. b) 124 segundos. c) 144 segundos.
d) 160 segundos. e) 240 segundos.

**64)** (ENEM-15) Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, 0,08 $m^3$ de água.
Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser

a) 16. b) 800. c) 1600. d) 8000. e) 16000.

**65)** (PUC/RJ-02) Você está viajando a uma velocidade de 1 km/min. Sua velocidade em km/h é:

a) 3600. b) 1/60 c) 3,6. d) 60. e) 1/3600.

**66)** (Unicamp-00) "Erro da NASA pode ter destruído sonda" (Folha de S. Paulo, 1/10/1999)
Para muita gente, as unidades em problemas de Física representam um mero detalhe sem importância. No entanto, o descuido ou a confusão com unidades pode ter consequências catastróficas, como aconteceu recentemente com a NASA. A agência espacial americana admitiu que a provável causa da perda de uma sonda enviada a Marte estaria relacionada com um problema de conversão de unidades. Foi fornecido ao sistema de navegação da sonda o raio de sua órbita em METROS, quando, na verdade, este valor deveria estar em PÉS. O raio de uma órbita circular segura para a sonda seria $r = 2{,}1 \times 10^5$ m, mas o sistema de navegação interpretou esse dado como sendo em pés. Como o raio da órbita ficou menor, a sonda desintegrou-se devido ao calor gerado pelo atrito com a atmosfera marciana.
a) Calcule, para essa órbita fatídica, o raio em metros. Considere 1 pé = 0,30 m.
b) Considerando que a velocidade linear da sonda é inversamente proporcional ao raio da órbita, determine a razão entre as velocidades lineares na órbita fatídica e na órbita segura.

**67)** (ENEM-16) O ato de medir consiste em comparar duas grandezas de mesma espécie. Para medir comprimentos existem diversos sistemas de medidas. O pé, a polegada e a jarda, por exemplo, são unidades de comprimento utilizadas no Reino Unido e nos Estados Unidos. Um pé corresponde a 1200/3937 metros ou doze polegadas, e três pés são uma jarda.
Uma haste com 3 jardas, 2 pés e 6 polegadas tem comprimento, em metro, mais próxima de
a) 1,0. b) 3,5. c) 10,0. d) 22,9. e) 25,3.

**68)** (UEL) Um homem caminha com velocidade VH = 3,6 km/h, uma ave com velocidade VA = 30 m/min e um inseto com VI = 60 cm/s. Essas velocidades satisfazem a relação
a) VI > VH > VA b) VA > VI > VH c) VH > VA > VI
d) VA > VH > VI e) VH > VI > VA

**69)** (UFPE-01) O fluxo total de sangue na grande circulação, também chamado de débito cardíaco, faz com que o coração de um homem adulto seja responsável pelo bombeamento, em média, de 20 litros por minuto. Qual a ordem de grandeza do volume de sangue, em litros, bombeado pelo coração em um dia?
a) $10^2$ b) $10^3$ c) $10^4$ d) $10^5$ e) $10^6$

**70)** (UFV-99) Considere o volume de uma gota como $5{,}0 \times 10^{-2}$ ml. A ordem de grandeza do número de gotas em um litro de água é:
a) $10^3$ b) $10^5$ c) $10^2$ d) $10^4$ e) $10^6$

**71)** (UFPE-05) Em um bairro com 2500 casas, o consumo médio diário de água por casa é de 1000 litros. Qual a ordem de grandeza do volume que a caixa d'água do bairro deve ter, em m□, para abastecer todas as casas por um dia, sem faltar água?
a) $10^3$ b) $10^4$ c) $10^5$ d) $10^6$ e) $10^7$

**72)** (UFPI-00) A superfície do Estado do Piauí mede cerca de 252.000 quilômetros quadrados ($km^2$). A precipitação pluviométrica média, anual, no Estado, é de cerca de 800mm. Isto significa que o valor médio do volume de água que o Piauí recebe por ano, sob a forma de chuvas, é de 200 quilômetros cúbicos ($km^3$). Esse volume, expresso em bilhões de metros cúbicos ($m^3$), vale:
a) 2000 b) 200 c) 20 d) 2,0 e) 0,2

**73)** (UFRRJ-05) Uma determinada marca de automóvel possui um tanque de gasolina com volume igual a 54 litros. O manual de apresentação do veículo informa que ele pode percorrer 12 km com 1 litro. Supondo-se que as informações do fabricante sejam verdadeiras, a ordem de grandeza da distância, medida em metros, que o automóvel pode percorrer, após ter o tanque completamente cheio, sem precisar reabastecer, é de
a) $10^0$. b) $10^2$. c) $10^3$. d) $10^5$. e) $10^6$.

**74)** (Epcar-13) Analise as proposições abaixo.
I) Uma jarra cheia de leite pesa 235 dag; com 3/4 de leite a jarra pesa 19,5 hg. O peso da jarra com 5/8 de leite é y gramas.
A soma dos algarismos de y é igual a 13
II) Com 3/5 de $0,\overline{6}$ da metade de 1 lata que comporta 20 $\ell$ de tinta, um pintor consegue pintar uma área de 16 $m^2$
Para pintar uma área 25% menor, são necessários, 0,003 $m^3$ de tinta.
III) Um pedreiro prepara uma mistura com 1 kg de cimento e 600 ml de água. Em seguida, ele aumenta em 50% a quantidade de cimento e mexe até ficar homogênea a mistura, obtendo 1800 ml dessa mistura. Se a densidade da água é 1 g/m$\ell$, então a densidade do cimento é igual a 1,25 kg/$\ell$
Tem-se que
a) apenas I é verdadeira. b) apenas II é falsa.
c) apenas I e II são falsas. d) I, II e III são verdadeiras.

**75)** (UERJ-18) Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a 1 libra e que 0,4 onças é igual a x libras. O valor de x é igual a:
a) 0,0125 b) 0,005 c) 0,025 d) 0,05

# RAZÕES E PROPORÇÕES

## 5.1 RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS

**5.1.1. Definição:** A razão entre duas grandezas a e b ($b \neq 0$) é dada pela fração $\frac{a}{b}$. Simbolicamente também pode-se escrever a : b. O número a é denominado de antecedente e o número b de consequente. Por exemplo, se em uma sala de aula com 40 alunos, 15 são homens e 25 são mulheres, então a razão entre as quantidades de homens e mulheres é igual a $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$. Quando diz-se "a razão entre x e y" entende-se que o numerador é igual a x e o denominador é igual a y: $\frac{x}{y}$.

Um fator importante no estudo das razões é quanto à unidade da razão entre duas grandezas. No caso de uma razão dada por $\frac{a}{b}$ a unidade da razão é igual à divisão entre as unidades de a e b. Se a e b possuem a mesma unidade, esta divisão é chamada de razão adimensional, ou seja, razão sem dimensão. Neste caso, a razão é lida pronunciando-se somente o valor numérico proveniente da divisão entre os números que representam as grandezas a e b. Por exemplo, se em uma fazenda foram colhidas 50 toneladas de feijão e 40 toneladas de arroz, a razão entre os valores colhidos de feijão e arroz é $\frac{50}{40} = 1,25$, sem nenhuma unidade. Caso a unidade da grandeza a seja diferente da unidade da grandeza b, a unidade da razão $\frac{a}{b}$ é igual à divisão entre as unidades de a e b, e a forma como se lê a razão é: *valor numérico da razão* seguido da *unidade de a por unidade de b*, fazendo as devidas simplificações, quando necessário. Por exemplo, na situação em que um imóvel de 100 $m^2$ custa R$ 50.000,00, afirma-se que o preço do metro quadrado deste imóvel é $\frac{50.000,00}{100} = 500,00 \frac{R\$}{m^2}$, onde lê "quinhentos reais por metro quadrado".

Algumas expressões bastante usadas no cotidiano são, na verdade, razões entre duas grandezas. Por exemplo, o velocímetro de um carro indica a velocidade do mesmo em quilômetros por hora, que nada mais é do que a razão entre o espaço percorrido (medido em quilômetros) e o tempo decorrido (medido em horas) na medição desta velocidade, para um pequeno intervalo de tempo. Outro exemplo, é o limite de álcool no sangue que um motorista pode possuir de modo a estar habilitado a dirigir, definida pela resolução 81 do CONTRAN: "Art. 1º. A comprovação de que o condutor se acha impedido de dirigir veículo automotor, sob suspeita de haver excedido os limites de seis decigramas de álcool por litro de sangue, ou de haver usado substância entorpecente... ". Neste caso, o limite é a

razão entre a massa de álcool (medido em decigramas) e o volume de sangue (medido em litros).

É possível somar ou subtrair duas razões, desde que as mesmas possuam as mesmas unidades. Por exemplo, se duas torneiras enchem um reservatório, sendo uma na vazão de 1 $\ell$/min e outra na razão de 2 $cm^3$/s, somente pode-se calcular a vazão resultante (soma das duas vazões) das duas torneiras depois de converter uma delas para a unidade da outra ou mesma as duas para uma terceira unidade comum, por exemplo $m^3$/s, que é a unidade padrão de vazão no sistema internacional de unidades.

## Exercícios Resolvidos

**1)** Uma torneira, funcionando sozinha, enche um reservatório em 3 horas. Uma outra torneira, funcionando sozinha, enche o mesmo reservatório em 6 horas. Determine em quantas horas as duas torneiras, funcionando juntas, enchem o tanque.

**Solução:**

Se V é o volume do reservatório, a vazão da 1ª torneira é $Z_1 = \frac{V}{3}$ e a vazão da 2ª torneira é $Z_2 = \frac{V}{6}$. Ligando as duas torneiras temos uma soma das duas vazões:

$$Z = Z_1 + Z_2 \Rightarrow \frac{\not{V}}{t} = \frac{\not{V}}{3} + \frac{\not{V}}{6} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2 \text{ horas}$$

**2)** (EPCAr-02) Um medicamento deve ser ingerido na quantidade de 3 mg por quilograma da massa corporal. Não pode, contudo, exceder 200 mg por dose ministrada. Cada gota, desse medicamento, contém 5 mg do remédio. O número de gotas desse medicamento que deve ser prescrito por dose a um paciente de 80 kg, é

a) 46 b) 40 c) 16 d) 80

**Solução: Alternativa B**

A 1ª razão fornecida é igual à massa total (dada em mg) de medicamento por massa da pessoa (em kg):

$R_1 = \frac{m}{M} = 3\frac{mg}{kg}$, onde m é a massa do medicamento e M é a massa da pessoa.

A 2ª razão fornecida é a massa máxima de medicamento por dose:

$R_2 = \frac{m}{x} = 200\frac{mg}{dose}$, onde m é a massa do medicamento e x é o número de doses.

A 3ª razão fornecida é a massa de medicamento em cada gota: $R_3 = \frac{m}{n} = 5\frac{mg}{gota}$, onde m é a massa do medicamento e n é a quantidade de gotas.

Se o paciente possui 80 kg, usando a 1ª razão:

$$R_1 = \frac{m}{M} \Rightarrow 3 = \frac{m}{80} \Rightarrow m = 240 \text{ mg}$$

Como a massa de medicamento é superior à 200 mg e inferior à 400 mg, o paciente deve tomar somente uma dose, ou seja, apenas 200 mg de medicamento.

Usando a 3ª razão: $R_3 = \frac{m}{n} \Rightarrow 5 = \frac{200}{n} \Rightarrow n = 40$ gotas

**3)** (Colégio Naval-84) Duas estradas de iguais dimensões começam simultaneamente a ser construídas por 15 operários cada uma delas. Mas, exclusivamente devido a dificuldades no terreno, percebe-se que enquanto uma turma avançou $\frac{2}{3}$ na sua obra, a outra avançou $\frac{4}{5}$ da sua. Quantos operários deve-se retirar de uma e por na outra, para que as duas obras fiquem prontas ao mesmo tempo?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 8 e) 10

**Solução: Alternativa B**

Suponha que L é o comprimento de cada uma das estradas. Seja R a razão entre o comprimento construído por cada operário e o tempo decorrido na construção, ou seja, $R = \frac{x}{n.t}$, onde x é o comprimento construído, n é a quantidade de operários e t é o tempo decorrido na construção. Devido a dificuldades no terreno, o valor de R para cada estrada é diferente. Assim, para o mesmo tempo $t_1$, tem-se que:

$$R_1 = \frac{\frac{2L}{3}}{15.t_1} = \frac{2L}{45t_1} \text{ e } R_2 = \frac{\frac{4L}{5}}{15.t_1} = \frac{4L}{75t_1}$$

Se y é a quantidade de operários que devem passar da 2ª estrada para a 1ª estrada, então para que as duas obras acabem no mesmo tempo, basta que 15 + y operários construam L/3 da 1ª estrada nos mesmo tempo $t_2$ que 15 – y operários construam L/5 da 2ª estrada. Uma vez que x = n.R.t, tem-se que:

$$\text{i) } \frac{L}{3} = (15+y)\frac{2L}{45t_1}t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{2(15+y)}{15}$$

$$\text{ii) } \frac{L}{5} = (15-y)\frac{4L}{75t_1}t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{4(15-y)}{15}$$

Desta forma, igualando as duas expressões obtém-se:

$$\frac{2(15+y)}{15} = \frac{4(15-y)}{15} \Rightarrow 15 + y = 30 - 2y \Rightarrow 3y = 15 \Rightarrow y = 5$$

**4)** (ENEM-17) Duas amigas irão fazer um curso no exterior durante 60 dias e usarão a mesma marca de xampu. Uma delas gasta um frasco desse xampu em 10 dias enquanto que a outra leva 20 dias para gastar um frasco com o mesmo volume. Elas combinam de usar, conjuntamente, cada frasco de xampu que levarem.
O número mínimo de frascos de xampu que deverão levar nessa viagem é
a) 2. b) 4. c) 6. d) 8. e) 9.
**Solução: Alternativa E**

As razões com que as amigas usam os frascos são $R_1 = \frac{1}{10}$ frascos/dia e $R_2 = \frac{1}{20}$ frascos/dia. Como as duas vão usar conjuntamente os mesmos fracos, deve-se somar a razão das duas amigas para determinar a razão resultante de consumo dos fracos por dia:

$$R_R = R_1 + R_2 \Rightarrow \frac{n}{60} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{n}{60} = \frac{3}{20} \Rightarrow n = 9$$

**5)** (ENEM-09) Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e a gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é *Spa-Francorchamps*, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km. Suponha que um piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de *Spa-Francorchamps*, parado no *box* para reabastecimento. Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo,
a) 617 kg. b) 668 kg. c) 680 kg.
d) 689 kg. e) 717 kg.
**Solução: Alternativa B**
Ao final das 16 voltas o carro terá percorrido $16 \times 7 = 112$ km
Como o consumo é de 75 litros para cada 100 km:

$$\frac{75 \text{ litros}}{100 \text{ km}} = \frac{V}{112 \text{ km}} \Rightarrow V = 84 \text{ litros}$$

Como a densidade da gasolina é de 750 g/L:

$$\frac{750 \text{ g}}{1 \text{ L}} = \frac{m}{84 \text{ L}} \Rightarrow m = 63000 \text{ g} = 63 \text{ kg}$$

Assim, o peso total do carro vale $605 + 63 = 668$ kg

## 5.2. PROPORÇÃO E SUAS PROPRIEDADES

### 5.2.1. Princípios Fundamentais da Proporcionalidade

Genericamente falando, *grandeza* (*escalar*) significa qualquer característica (física, química, biológica, geográfica, histórica, etc.) que pode ser medida por números reais, tais como a massa, o volume, a carga elétrica ou o número de partículas constituintes de uma porção bem definida do espaço (um corpo). São também grandezas a liberação ou a absorção de uma certa substância por um determinado ser vivo, bem como a densidade demográfica de um país atualmente ou a área ocupada por uma civilização específica num determinado momento histórico (admitindo-se estimativas).

Diz-se que duas grandezas são (*diretamente*) *proporcionais* quando existir uma correspondência (funcional) $f: R_+ \to R_+$, dada por $f(x) = y$, entre as medidas delas, x e y, de tal sorte que as duas condições a seguir sejam satisfeitas:

a) Aumentando-se o valor x de uma delas, aumenta-se o valor correspondente da outra. Noutros termos, a correspondência entre elas é estritamente crescente, isto é: $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$, em que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

b) Dobrando-se, triplicando-se, ou mais genericamente, multiplicando-se o valor de uma delas por um número natural n, o valor correspondente da outra também fica dobrado, triplicado ou multiplicado pela mesma quantia n, respectivamente. Formalmente: $f(nx) = ny = nf(x)$, $\forall\ x \in R_+$, $\forall\ n \in N$. Ou, ainda, caso $x \mapsto y$, deve-se impor $nx \mapsto ny$, para todo natural n.

Nestas condições, a função f é denominada uma **proporcionalidade** (direta) entre as grandezas medidas por x e por y. Observe-se que, nesta definição, as grandezas utilizadas podem assumir, apenas, valores não negativos. É possível abranger valores negativos adaptando a definição, mas isso não será feito aqui.

## Exercícios Resolvidos

**1)** Supondo que se tem uma certa porção de determinado líquido homogêneo, nota-se que sua massa, m, aumenta com o seu volume, V: quanto maior o volume de líquido, maior sua massa. E mais: dobrando-se o volume de líquido, dobra-se sua massa; triplicando-se seu volume, triplica-se sua massa. De um modo geral, um líquido ocupando completamente um recipiente de volume n.V, em que n é natural, pode ser visto como a união (soma) de n recipientes de volume V contendo tal líquido. Portanto, a massa de um corpo com volume nV é igual à soma das massas de n corpos de volume V, isto é, **a massa de um corpo (nas condições iniciais) é diretamente proporcional ao seu volume**, pois:

a) $V_1 > V_2 \Rightarrow m_1 > m_2$

b) $V \mapsto m \Rightarrow n.V \mapsto n.m$, $\forall\ n \in N$ e $\forall\ V, m \in R_+$.

2) Experimentalmente, é fácil concluir que a quantidade Q de calor (medida em calorias, por exemplo) necessária para derreter um bloco de gelo (já na temperatura de fusão) aumenta com a massa m do bloco, isto é, quanto maior o bloco (sua massa), mais calor é preciso lhe fornecer para que sofra derretimento total. Ou seja, $m_1 > m_2$ implica $Q_1 > Q_2$. **Além disso**, é possível verificar que, dobrando-se a massa do bloco, dobra-se a quantidade de calor necessária para derretê-lo; triplicando-se a massa do bloco, triplica-se a quantidade de calor necessária para a fusão; mais geralmente, caso a quantidade de calor necessária para derreter x gramas seja sempre a mesma, Q, tem-se que a quantidade de calor necessária para fundir nm gramas, com n natural, pode ser vista como a soma das quantidades de calor necessárias para derreter n blocos de m gramas, separadamente, ou seja, nQ. Portanto, tem-se Q **diretamente proporcional** a m. Ou seja, é permitido, em tais condições, garantir que Q (nm) = nQ (m).

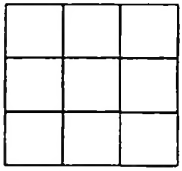
3) Suponha-se que se apliquem C reais numa caderneta de poupança, a uma taxa de juros constante. Pode-se afirmar que o total recebido após um **tempo determinado** de aplicação, M (comumente denominado *montante*) é uma função crescente de C, pois, como é óbvio, quanto mais se investe inicialmente, mais se recebe ao final da operação: $C_1 > C_2 \Rightarrow M_1 > M_2$. Além disso, quando uma pessoa põe um capital inicial de n.C reais na poupança (n natural qualquer) os rendimentos equivalem ao total ganho por n pessoas colocando individualmente C reais cada, a mesma taxa de juros, pelo mesmo período de tempo. Isto é: M(n.C) = n.M(C). Pode-se garantir assim que o montante é diretamente proporcional ao capital inicial investido.
OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: É fundamental perceber que o montante **NÃO** é diretamente proporcional ao tempo de aplicação (nem mesmo no regime de capitalização simples). Aplicando C reais e recebendo M reais após um mês, por exemplo, não é verdade que aplicando C reais durante t meses se receba a quantia de t.M reais. Com efeito, ao fim de cada mês, os juros daquele período se agregam à quantia existente, fazendo com que os juros do próximo período incidam sobre uma quantia variável, tal qual cada mês tendo investimentos iniciais diferentes.

4) No primeiro exemplo dado nesta apostila, o preço P a pagar por uma corrida de táxi de x km é claramente uma função crescente de x, porque quanto maior o percurso, mais se paga. Entretanto, uma corrida de 2x quilômetros, **não** equivale a duas corridas sucessivas de x km cada (feitas por uma mesma pessoa, por exemplo), uma vez que na segunda situação paga-se a bandeirada duas vezes. Portanto, já que $P(2x) \neq 2.P(x)$. Logo, o preço P de uma corrida de táxi **não** é diretamente proporcional ao número x de quilômetros rodados.

5) O *módulo* da força elástica no exemplo do sistema massa-mola acima constitui uma proporcionalidade, sob as condições ideais de elasticidade. Em verdade, o módulo da força de restituição é função crescente da elongação (quanto maior o deslocamento em relação à posição de equilíbrio, maior a força elástica necessária

para tentar restituir o corpo à posição original). Além disso, dobrando ou triplicando a elongação, por exemplo, verifica-se experimentalmente que a força elástica (medida por meio da aceleração) dobra ou triplica, respectivamente, seu módulo. Caso um deslocamento x a partir da posição de equilíbrio produza uma força elástica de módulo F, é possível concluir (experimentalmente) que um deslocamento n.x, com n natural, produz uma força de módulo n.F. Em outras palavras: $F(n.x) = n.F(x)$.

6) Seja S a área de um quadrado de lado *l*, em concordância de unidades. Naturalmente, S é uma função crescente de *l* (quanto maior o lado do quadrado, maior será área correspondente). Apenas isso, porém, ***não basta para afirmar que S é proporcional a l.*** De fato, por exemplo, triplicando-se a medida do lado de um quadrado, é imediato perceber que nele passam a caber exatamente nove quadrados congruentes ao original. Ou seja: $S(3l) = 9.S(l) \neq 3.S(l)$. Portanto, S **não** é diretamente proporcional a *l*.



7) Mantendo-se a altura h de um retângulo constante (deixando, por exemplo, dois lados opostos sempre sobre um mesmo par de retas paralelas), a área do retângulo é diretamente proporcional à sua base. Isto é extremamente evidente caso se olhe para a fórmula da área de um retângulo. A questão, porém, é que a proporcionalidade é quem implica tal fórmula nesta abordagem (ou seja, a fórmula da área é um resultado posterior). Como verificar então que a área de um retângulo é proporcional à base, mantida constante a altura? É fácil! Suponha-se que um retângulo de base b e de altura h possua área S. A princípio, é óbvio que quanto maior a base do retângulo, maior será sua área (de fato, um retângulo de base $b_1$ fica inteiramente contido num de base $b_2 > b_1$, caso possuam mesma altura). Além disso, um retângulo de base n.b e de altura h pode ser decomposto em n retângulos congruentes e justapostos, cada um de base b e com altura h (*desde que n seja natural*). Ou seja, $S(n.b) = n.S(b)$, para todos n, natural, e b, real positivo.

**Observação:** Na definição dada de proporcionalidade direta, é possível permitir que a relação funcional entre as grandezas seja estritamente decrescente, desde que se permitam valores negativos para alguma das duas grandezas. Note-se que, numa proporcionalidade, a condição b) da definição pede que $f(n.x) = n.f(x)$ para qualquer valor real de x, mas apenas para valores naturais de n. No entanto, tal condição vale (numa proporcionalidade) **para qualquer valor real de n.**

### 5.2.2. Proporção entre quatro números

Dados quatro números reais a, b, c e d, não-nulos e nesta ordem, dizemos que eles formam uma proporção quando a razão entre a e b é igual à entre c e d:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ afirma-se que as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes. Apesar de estar caindo em desuso ainda é possível encontrar textos que utilizam a seguinte simbologia para a proporção entre quatro números: a : b = c : d (lê-se "a está para b assim como c está para d"). Os termos b e c são chamados de extremos da proporção, enquanto que os termos a e d são chamados de extremos da proporção. Por exemplo, uma vez que $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$ pode-se afirmar que 3 está para 4 assim como 27 está para 36.

Também é possível definir proporção para mais de duas razões. Assim, afirmar-se que as razões $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}$ são equivalentes se e somente se:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}.$$

Outra maneira de escrever esta proporção múltipla é:

$$x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = x_3 : y_3 = \ldots = x_n : y_n.$$

#### 5.2.2.1. Propriedades

1) Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ então:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = \frac{\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_n}{\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n}$$

**Demonstração:**

Seja $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k$, assim temos que $x_1 = k.y_1$, $x_2 = k.y_2$, ..., $x_n = k.y_n$.

Logo:

$$\frac{\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_n}{\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n} = \frac{\pm k.y_1 \pm k.y_2 \pm k.y_3 \pm \ldots \pm k.y_n}{\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n} = \frac{k(\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n)}{\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n} = k$$

É importante ressaltar que a escolha dos sinais é livre, porém deve satisfazer duas condições:

i) $\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n \neq 0$

ii) para cada índice i, o sinal de de $x_i$ e de $y_i$ deve ser o mesmo

2) Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ... = \frac{x_n}{y_n}$ então:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ... = \frac{x_n}{y_n} = \frac{\pm a_1.x_1 \pm a_2.x_2 \pm a_3.x_3 \pm ... \pm a_n.x_n}{\pm a_1.y_1 \pm a_2.y_2 \pm a_3.y_3 \pm ... \pm a_n.y_n},$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais quaisquer.

**Demonstração:**

Seja $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ... = \frac{x_n}{y_n} = k$, assim temos que $x_1 = k.y_1$, $x_2 = k.y_2$, ..., $x_n = k.y_n$.

Logo:

$$\frac{\pm a_1.x_1 \pm a_2.x_2 \pm a_3.x_3 \pm ... \pm a_n.x_n}{\pm a_1.y_1 \pm a_2.y_2 \pm a_3.y_3 \pm ... \pm a_n.y_n} = \frac{\pm k.a_1.y_1 \pm k.a_2.y_2 \pm k.a_3.y_3 \pm ... \pm k.a_n.y_n}{\pm a_1.y_1 \pm a_2.y_2 \pm a_3.y_3 \pm ... \pm a_n.y_n} = k$$

A escolha dos números reais $a_1$, $a_2$, .... $a_n$ bem como dos sinais é livre, porém respeitando as seguintes condições;

i) $\pm a_1.y_1 \pm a_2.y_2 \pm a_3.y_3 \pm ... \pm a_n.y_n \neq 0$

ii) para cada índice i, o sinal de de $a_i.x_i$ e de $a_i.y_i$ deve ser o mesmo

3) Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ... = \frac{x_n}{y_n}$ então:

$$\frac{x_1.x_2.x_3...x_n}{y_1.y_2.y_3...y_n} = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^n = \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^n = \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^n = ... = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^n$$

**Demonstração:**

Seja $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ... = \frac{x_n}{y_n} = k$, assim temos que $x_1 = k.y_1$, $x_2 = k.y_2$, ..., $x_n = k.y_n$.

Logo: $\frac{x_1.x_2.x_3...x_n}{y_1.y_2.y_3...y_n} = \frac{x_1}{y_1}.\frac{x_2}{y_2}.\frac{x_3}{y_3}...\frac{x_n}{y_n} = \underbrace{k.k.k...k}_{n} = k^n$

## Exercícios Resolvidos

1) (ENEM-15) Uma fábrica vende pizzas congeladas de tamanhos médio e grande, cujos diâmetros são respectivamente 30 cm e 40 cm. Fabricam-se apenas pizzas de sabor muçarela. Sabe-se que o custo com os ingredientes para a preparação é diretamente proporcional ao quadrado do diâmetro da pizza, e que na de tamanho médio esse custo é R$ 1,80. Além disso, todas possuem um custo fixo de R$ 3,00, referente às demais despesas da fábrica.

Sabe-se ainda que a fábrica deseja lucrar R$ 2,50 em cada pizza grande.

Qual é o preço que a fábrica deve cobrar pela pizza grande, a fim de obter o lucro desejado?

a) R$ 5,70 b) R$ 6,20 c) R$ 7,30 d) R$ 7,90 e) R$ 8,70

**Solução: Alternativa E**

Como o custo é diretamente proporcional ao quadrado do diâmetro:

$$\frac{x_{grande}}{D^2_{grande}} = \frac{x_{médio}}{D^2_{médio}} \Rightarrow \frac{x_{grande}}{40^2\ cm^2} = \frac{R\$\ 1,80}{30^2\ cm^2} \Rightarrow x_{grande} = R\$\ 3,20$$

Assim, o preço final é:

$$p_{final} = x_{grande} + \text{custo fixo} + \text{lucro} = R\$\ 3,20 + R\$\ 3,00 + R\$\ 2,50 = R\$\ 8,70$$

**2)** (Colégio Naval-85) Uma grandeza **X** é diretamente proporcional às grandezas **P** e **T** e inversamente proporcional ao quadrado da grandeza **w**. Se aumentarem **P** de 60% do seu valor e diminuirmos **T** de 10% do seu valor, para que a grandeza **X** não se altere, devemos:

a) diminuirmos **w** de 35% do seu valor;
b) diminuirmos **w** de 20% do seu valor;
c) aumentar **w** de 25% do seu valor;
d) aumentar **w** de 35% do seu valor;
c) aumentar **w** de 20% do seu valor;

**Solução: Alternativa E**

Se X é diretamente proporcional a P e a T e inversamente proporcional ao quadrado de w, então pode-se afirmar que $X = k\frac{P.T}{w^2}$, onde k é uma constante.

Segundo o enunciado são feitas duas medidas, nas situações 1 e 2:

$X_1 = k\frac{P_1.T_1}{w_1^2}$ e $X_2 = k\frac{P_2.T_2}{w_2^2}$.

Ainda de acordo com o enunciado: $P_2 = 1,6.P_1$, $T_2 = 0,9.T_1$ e $X_1 = X_2$

Logo: $\not{k}\frac{P_1.T_1}{w_1^2} = \not{k}\frac{P_2.T_2}{w_2^2} \Rightarrow \frac{\not{P_1}.\not{T_1}}{w_1^2} = \frac{1,6.\not{P_1}.0,9.\not{T_1}}{w_2^2} \Rightarrow w_2^2 = 1,44.w_1^2 \Rightarrow$

$w_2 = 1,2.w_1 \Rightarrow$ w aumenta de 20% do seu valor.

3) (Colégio Naval-93) O conjunto P é formado três elementos respectivamente proporcionais a 2, 3 e 7. Sabendo que o menor mais o triplo do maior menos o dobro do outro é igual a 34, a soma destes três elementos é igual a:

a) 20 b) 21 c) 22 d) 23 e) 24

**Solução: Alternativa E**

De acordo com as propriedades de proporção: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7} = \frac{x+3z-2y}{2+3.7-2.3} = \frac{34}{17} = 2$

Assim, tem-se que: $x = 4$, $y = 6$ e $z = 14 \Rightarrow x + y + z = 4 + 6 + 14 = 24$

**4)** (ENEM-16) Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 $m^2$, sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.
Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é

a) $\frac{500.81}{A.D^2}$ b) $\frac{500.A}{D^2}$ c) $\frac{500.D^2}{A}$ d) $\frac{500.A.D^2}{81}$ e) $\frac{500.3.D^2}{A}$

**Solução: Alternativa B**

Perceba que a espessura E não consta em nenhuma alternativa. Como a espessura E é inversamente proporcional ao quadrado da distância D, na expressão do custo C: $E.D^2 = k_1$, onde $k_1$ é uma constante. Por outro lado, o custo é diretamente proporcional ao volume, dado pelo produto E.A. Assim, pode-se afirmar que $C = k_2.E.A$, onde $k_2$ é uma constante. Deste modo, pode-se afirmar que $C = k_2.E.A = k_2.\frac{k_1}{D^2}.A = \frac{k_1 k_2 A}{D^2} = \frac{kA}{D^2}$, onde k é uma constante dada por $k = k_1k_2$.

Para determinar k basta substituir os valores numéricos informados:

$$C = \frac{kA}{D^2} \Rightarrow 500 = \frac{k.9}{3^2} \Rightarrow k = 500$$

Assim, a expressão que relaciona C, A e D é $C = \frac{500.A}{D^2}$.

**5)** (UPE-18) Dona Filó é famosa pelas empadas que vende na cantina de uma escola. No preparo da massa das empadas, para cada copo de leite, ela usa três ovos e, para cada ovo, uma xícara e meia de farinha de trigo. Se Dona Filó preparar a massa das empadas usando três copos de leite, de quantas xícaras de farinha de trigo ela vai precisar?

a) 4,5 b) 9 c) 12 d) 13,5 e) 27

**Solução: Alternativa D**

Sejam: x = copos de leite; y = ovos e z = xícaras de farinha de trigo

Segundo o enunciado tem-se as seguintes proporções: $\frac{x}{1} = \frac{y}{3}$ e $\frac{y}{1} = \frac{y}{3/2}$

Quando x = 3: $\frac{3}{1} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 9$

Quando y = 9: $\frac{9}{1} = \frac{y}{3/2} \Rightarrow y = 13,5$

### 5.2.3. Divisão em partes diretamente proporcionais

**5.2.3.1. Definição:** Dividir um número real x em n partes diretamente proporcionais aos números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ é equivalente a determinar os números reais $x_1, x_2, ..., x_n$ de modo que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = x \\ \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = ... = \dfrac{x_n}{a_n} \end{cases}$$

Aplicando propriedade de proporção os números $x_1, x_2, ..., x_n$ podem ser facilmente obtidos:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{x}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{a_1.x}{a_1 + a_2 + ... + a_n},\ x_2 = \frac{a_2.x}{a_1 + a_2 + ... + a_n},\ ...,\ x_n = \frac{a_n.x}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

Por exemplo, dividir o número 120 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 4 e 6. Se x é a parte proporcional a 2, y a parte proporcional a 4 e z a parte proporcional a 6 tem-se:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{x + y + z}{2 + 4 + 6} = \frac{120}{12} = 10 \Rightarrow x = 20,\ y = 40 \text{ e } z = 60$$

## Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-08) Dois amigos compraram uma rifa por R$ 20,00, cujo prêmio é R$ 1.000,00. Um deles deu R$ 15,00, e, o outro, R$ 5,00. Caso sejam contemplados, quantos reais a mais deverá receber o que deu o maior parte?

a) R$ 250 b) R$ 300 c) R$ 450 d) R$ 500 e) R$ 750

**Solução: Alternativa D**

O prêmio deverá ser repartido proporcionalmente à parte de cada um na compra do bilhete:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{5} = \frac{1.000}{20} = 50 \Rightarrow x = 750 \text{ e } y = 250 \Rightarrow x - y = 750 - 250 = 500$$

2) (EPCAr-00) Um terreno de $5.400m^2$ foi dividido em quatro lotes com as seguintes áreas: $a^2$, $b^2$, $c^2$ e $d^2$. Se os valores de a, b, c e d são respectivamente proporcionais a 2, 3, 4 e 5, então o valor de $2a - 3b + 2c - 3d$ é

a) – 120 b) – 12 c) 12 d) 120

**Solução: Alternativa A**

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{9}=\frac{c^2}{16}=\frac{d^2}{25}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4+9+16+25}=\frac{5.400}{54}=100 \Rightarrow$

$a^2=400$, $b^2=900$, $c^2=1600$ e $d^2=2500 \Rightarrow a=20$, $b=30$, $c=40$ e $d=50$

Assim: $2a-3b+2c-3d=40-90+80-150=-120$

**3)** (Colégio Naval-87) Duas pessoas constituíram uma sociedade entrou com um capital de Cr$ 5.000.000 e a segunda com Cr$ 5.000.000. Um ano depois, admitiram um terceiro sócio, que entrou com um capital de Cr$ 10.000.000. Decorridos 18 meses desde o início da sociedade, a firma teve um lucro de Cr$ 12.000.000. A parte do lucro que caberá ao terceiro sócio é

Obs: o lucro é dividido proporcionalmente ao capital e ao tempo, não se levando em conta outros fatores, como por exemplo, a inflação.

a) Cr$ 1.000.000 b) Cr$ 2.000.000 c) Cr$ 3.000.000

d) Cr$ 4.000.000 e) Cr$ 5.000.000

**Solução: Alternativa C**

Desde que o lucro é proporcional ao capital e ao tempo então é proporcional ao produto deles:

$\frac{x}{(5.000)(18)}=\frac{y}{(5.000)(18)}=\frac{z}{(10.000)(6)}=\frac{x+y+z}{90.000+90.000+60.000}=\frac{12.000}{240.000}=0,05 \Rightarrow$

$z=(0,05)(60.000) \Rightarrow z=3.000$

**4)** (ENEM-12) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350 b) 300, 300, 150 c) 300, 250, 200

d) 200, 200, 100 e) 100, 100, 50

**Solução: Alternativa B**

Sejam $J_1$, $C_1$ e $P_1$ as quantidade de José, Carlos e Paulo levaram na primeira parte do trajeto, respectivamente, e $J_2$, $C_2$ e $P_2$ na segunda parte. Se n é o total de laranjas:

i) $\frac{J_1}{6}=\frac{C_1}{5}=\frac{P_1}{4}=\frac{J_1+C_1+P_1}{6+5+4}=\frac{n}{15} \Rightarrow J_1=\frac{6n}{15}$, $C_1=\frac{5n}{15}$ e $P_1=\frac{4n}{15}$

ii) $\frac{J_2}{4}=\frac{C_2}{4}=\frac{P_2}{2}=\frac{J_2+C_2+P_2}{4+4+2}=\frac{n}{10} \Rightarrow$

$J_2 = \frac{2n}{5} = \frac{6n}{15}$, $C_2 = \frac{2n}{5} = \frac{6n}{15}$ e $P_2 = \frac{n}{5} = \frac{3n}{15}$

Assim, a única quantidade que aumentou foi a de Carlos:

$\frac{6n}{15} - \frac{5n}{15} = 50 \Rightarrow \frac{n}{15} = 50 \Rightarrow n = 750$

Desta forma, as quantidades de laranjas na segunda parte do trajeto são:

$J_2 = \frac{2.750}{5} = 300$, $C_2 = \frac{2.750}{5} = 300$ e $P_2 = \frac{750}{5} = 150$

**5)** (Olimpíada do Pará-04) Três pessoas, Abel, Benito e Ceferino, entretêm-se jogando poker. Antes do jogo, as quantidades de dinheiro que possuíam Abel, Benito e Ceferino estavam na relação 7:6:5, respectivamente, e ao finalizar o jogo as quantidades de dinheiro de cada um ficaram na relação 6:5:4, respectivamente. Se um dos jogadores ganhou R$ 12 no jogo, determine quanto dinheiro cada um tinha ao começar o jogo.

**Solução:**

Seja x a quantidade total de dinheiro. Como a relação inicial de dinheiro é 7:6:5 as quantidades são: $x_A = \frac{7x}{18}$, $x_B = \frac{6x}{18}$ e $x_C = \frac{5x}{18}$.

Se 6:5:4 é a relação final, então, ao terminar o jogo cada um tem:

$x'_A = \frac{6x}{15}$, $x'_B = \frac{5x}{15}$ e $x'_C = \frac{4x}{15}$

Como $\frac{7}{18} < \frac{6}{15}$ então Abel ganhou dinheiro com o jogo.

Como $\frac{6}{18} = \frac{5}{15}$ então Benito não ganhou e nem perdeu dinheiro com o jogo.

Como $\frac{5}{18} > \frac{4}{15}$ então Ceferino perdeu dinheiro com o jogo.

Assim, foi Abel quem ganhou R$ 12 reais com o jogo:

$\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 12 \Rightarrow \frac{x}{90} = 12 \Rightarrow x = 1080.$

Desta forma, no início do jogo cada um tinha:

$x_A = \frac{7.1080}{18} = 420$, $x_B = \frac{6.1080}{18} = 360$ e $x_C = \frac{5.1080}{18} = 300$.

### 5.2.4. Divisão em partes inversamente proporcionais

**5.2.4.1. Definição:** Dividir um número real x em n partes inversamente proporcionais aos números reais $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ é equivalente a dividir x em n partes diretamente proporcionais aos números $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$, ou seja, deve-se determinar os números $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ de modo que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = x \\ \frac{x_1}{1/a_1} = \frac{x_2}{1/a_2} = ... = \frac{x_n}{1/a_n} \end{cases}$$

Aplicando propriedade de proporção os números $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ podem ser facilmente obtidos:

$$\frac{x_1}{1/a_1} = \frac{x_2}{1/a_2} = ... = \frac{x_n}{1/a_n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n} = \frac{x}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{(1/a_1)x}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n}, \quad x_2 = \frac{(1/a_2)x}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n}, ...,$$

$$x_n = \frac{(1/a_n)x}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n}$$

Por exemplo, dividir o número 220 em três partes A, B e C inversamente proporcionais aos números 2, 4 e 6:

$$\frac{A}{1/2} = \frac{B}{1/4} = \frac{C}{1/6} = \frac{A+B+C}{1/2+1/4+1/6} = \frac{220}{\frac{11}{12}} = 240 \Rightarrow A = 120,\ B = 60 \text{ e } C = 40$$

## Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-07) O litro do combustível X custa R$ 2,00 e do combustível Y, R$ 3,00. O tanque do veículo V, que se move indiferentemente com os combustíveis X e Y, tem capacidade total de 54 litros. O veículo V, quando abastecido unicamente com o combustível X, tem rendimento de 15 quilômetros por litro e, quando abastecido unicamente com o combustível Y, tem rendimento de 18 quilômetros por litro. Quantos reais gastará o proprietário de V, caso resolva abastecer completamente o seu tanque com uma mistura desses combustíveis, de forma que, numericamente, os volumes correspondentes de X e Y sejam, simultaneamente, diretamente proporcionais aos rendimentos e inversamente proporcionais aos custos de cada um deles?

a) 131,00 b) 132,00 c) 133,00 d) 134,00 e) 135,00

**Solução: Alternativa B**

Se os volumes são diretamente proporcionais aos rendimentos e inversamente proporcionais aos custos, então estes volumes são diretamente proporcionais à razão entre os rendimentos e os custos. Logo:

$$\frac{x}{\frac{15}{2}} = \frac{y}{\frac{18}{3}} = \frac{x+y}{7,5+6} = \frac{54}{13,5} = 4 \Rightarrow x = 30\ \ell \text{ e } y = 24\ \ell$$

Assim, o custo pode ser calculado da seguinte maneira:

$C = (30)(2,00) + (24)(3,00) = 60,00 + 72,00 = 132,00$

2) Um empresário resolve premiar três funcionários que se destacaram no ano de 2011. Uma quantia em dinheiro é dividida entre eles em partes inversamente proporcionais ao número de faltas injustificadas de cada um em 2011, ou seja: 3, 5 e 8 faltas. Se o valor do prêmio do funcionário que receber a menor quantia foi de R$ 6.000,00, então o valor do prêmio do funcionário que recebeu a maior quantia foi igual a:

a) R$ 11.600,00 b) R$ 12.000,00 c) R$ 15.000,00
d) R$ 15.600,00 e) R$ 16.000,00

**Solução: Alternativa E**

Sejam x, y e z as quantidades recebidas por cada funcionário.

Como estas quantidades são inversamente proporcionais a 3, 5 e 8:

$$\frac{x}{1/3} = \frac{y}{1/5} = \frac{z}{1/8}$$

Perceba que a menor quantia é recebida por z (é quem possui o menor denominador na proporção acima) e a maior quantia é recebida por x:

$$\frac{x}{1/3} = \frac{y}{1/5} = \frac{z}{1/8} \Rightarrow 3x = 5y = 8z \Rightarrow 3x = 8(6000,00) \Rightarrow x = 16000,00$$

## 5.3. REGRA DE TRÊS SIMPLES

### 5.3.1. Análise algébrica

A idéia da regra de três é bem simples (e conhecida, embora muitas vezes utilizada cega ou erroneamente). Suponha-se que duas grandezas x e y = f(x) sejam **proporcionais** e que se conheçam um par de valores (não nulos) correspondentes, $x_1$ e $y_1 = f(x_1)$. É possível, conhecendo um terceiro valor ($x_2$, por exemplo), determinar o quarto valor, correspondente ao anterior. Com efeito, **uma vez que f defina uma proporcionalidade entre x e y**, deve-se ter:

$f(x_1) = y_1 = a.x_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = a$. Caso $x_2 = 0$, deve-se ter $y_2 = 0$. Senão, de modo análogo, deve-se ter: $\frac{y_2}{x_2} = a$. Por conseguinte: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1}$, que é a conhecida regra de três (*simples*, por envolver apenas *duas* grandezas variáveis). Note-se que, em geral, numa regra de três não se dá muita importância para o fator de proporcionalidade, que é mais um elo de ligação entre os valores desejados.

Deve-se ressaltar mais uma vez que uma regra de três só deve ser utilizada caso se tenha certeza que as grandezas são, de fato, proporcionais. Assim, no exemplo da corrida de táxi, caso se pague R$ 26,90 por uma corrida de 20 km, NÃO é conveniente afirmar que o preço a pagar em reais, P, por uma corrida de 60 km pode ser obtido por meio da proporção:

$\frac{26,9}{20} = \frac{P}{60} \Leftrightarrow P = 86,7$, uma vez que P não é proporcional à quilometragem percorrida nas condições admitidas.

Além disso, vale a pena também destacar quais hipóteses se utilizam (ainda que um tanto inverossímeis) para garantir a proporcionalidade entre duas grandezas.

### Exercícios Resolvidos

**1)** Alguém consegue digitar 5 páginas em 15 minutos. Quantas páginas essa pessoa consegue digitar em 1 hora?

Embora seja uma pergunta simples, é importante saber porque se utiliza a proporção: $\frac{5}{15} = \frac{x}{60} \Leftrightarrow x = 20$. Uma maneira tradicional (e útil) de analisar o que foi feito é a denominada "redução à unidade". Quando se usa a proporcionalidade entre as grandezas "quantidade de páginas digitadas" e "tempo (mínimo) necessário à digitação", o que se faz na realidade é SUPOR que a pessoa mantém constante a sua *taxa de digitação* (por unidade de tempo). Assim, encara-se a afirmação "alguém consegue digitar 5 páginas em 15 minutos" como "a cada minuto a pessoa faz SEMPRE 1/3 de página", ou equivalentemente "cada página é SEMPRE

digitada em 3 minutos". Caso isto seja admitido, é válida a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, apesar de ser um tanto improvável que alguém (humano) consiga, a qualquer instante de sua vida, manter sempre o mesmo ritmo de digitação. É interessante também notar que tanto faz pôr o número de páginas digitadas, P, em função do tempo, t, quanto o contrário, uma vez que uma função linear (ou uma afim, de modo mais geral) é sempre invertível. Assim, é possível escrever: $P = \frac{1}{3}t$ ou, de modo equivalente, $t = 3P$.

**2)** Quando se diz que o preço de um quilo de frango é de R$ 3,50 já se está fazendo, automaticamente, a redução à unidade entre as grandezas "massa de frango (K)" e "preço a pagar (P)": reduziu-se o preço à massa unitária (1 kg). A própria representação mais formal deste fato já explicita a redução: 3,5 $R\$/_{kg}$. Para garantir a proporcionalidade, porém, deve-se notar ainda que a relação entre as grandezas P e K é linear. De fato: $P = 3,5.K$, pois levando 0 kg de frango, não se paga real algum (pelo frango). Ou então, notando que:

- Quanto mais frango se leva, mais se paga;
- Quando a quantidade de frango inicial é multiplicada por um número natural qualquer (por 4, por exemplo), o preço original a pagar fica multiplicado pela mesma constante (4).

**3)** Suponha-se que o preço de um imóvel na planta (imediatamente antes de começar a ser construído) seja de R$20.000,00 e que, a cada mês (durante o tempo de construção) esse preço suba R$300,00. Observe-se que já foi feita uma redução à unidade entre as grandezas "preço (P)" e "número de meses de construção (N)": a taxa de variação de preços é suposta constante e igual a 300 $R\$/_{mês}$. Contudo, não há proporcionalidade entre essas grandezas. Basta notar que, após um mês de construção (N = 1), o preço do imóvel é de R$ 20.300,00. Dobrando o número de meses, porém (N = 2), o valor do imóvel não dobra, pois passa a R$ 20.600,00. Isto se deve ao fato de o preço de planta não ser nulo. Como é fácil perceber (e será demonstrado em seguida), a função que relaciona as duas grandezas não é linear, embora seja afim. Sua lei é $P = 26000 + 300N$. Ou seja, não há proporcionalidade, não cabendo, portanto, uma regra de três para obter relações entre P e N.

### 5.3.2. Regra das flechas

A regra das flechas é um processo prático para resolver problemas envolvendo regra de três simples, dos quais conhecemos três dos quatro valores envolvidos e determinamos o valor desconhecido. A regra das flechas é baseada em três passos:

1) Construir uma tabela, colocando na mesma coluna os valores da mesma grandeza em cada uma das situações propostas e colocando na mesma linha os valores correspondentes à mesma situação.

2) Identificar se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais. Para fazer isto, inicialmente deve-se colocar uma flecha direcionada do menor para o maior valor da grandeza que possui os dois valores conhecidos. Assim, se na primeira situação o valor é menor que na segunda situação então a flecha fica direcionada para baixo. Caso contrário, a flecha fica direcionada para cima. Depois, deve-se observar se um aumento na grandeza que possui os dois valores conhecidos provoca um aumento (caso de diretamente proporcionais) ou uma diminuição (caso de inversamente proporcionais) na grandeza que possui um dos valores desconhecidos. Se as duas grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, coloca-se uma flecha no mesmo sentido da primeira, ao lado da randeza que possui um valor desconhecido. Se as grandezas forem inversamente roporcionais, a flecha é colocada em sentido contrário à primeira flecha.

) Se as duas flechas possuírem mesmo sentido, a proporção é escrita do mesmo modo que está na tabela. Se as flechas possuírem sentidos contrários, então a proporção é escrita invertendo uma das razões e mantendo a outra. Definida a expressão final da proporção, basta equacionar e resolver a equação obtida.

Neste momento o leitor deve estar se perguntando como executar, sem erro, o passo 2 da resolução de uma regra das flechas? A definição se duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais depende apenas de bom senso e um pouco de lógica. Por exemplo, suponha que se deseja determinar a proporcionalidade entre o consumo de um carro e a distância percorrida. É óbvio que quanto mais um carro consome de combustível menos distância ele irá percorrer. Assim, consumo de combustível e distância percorrida são grandezas inversamente proporcionais. Por outro lado, caso a situação proposta seja a de uma construção, onde se deseja definir a proporção entre a quantidade de tinta e a área a ser pintada. É bastante razoável considerar que quanto mais área a ser pintada, mais tinta será necessário. Logo, área e tinta são grandezas diretamente proporcionais.

Vamos avaliar a aplicação da regra das flechas a partir de alguns exemplos.

## Exercícios Resolvidos

1) Com uma área de absorção de raios solares de 1,2 $m^2$ uma lancha com motor movido a energia solar consegue produzir 400 W por hora de energia. Aumentando-se essa área para 1,5 $m^2$, qual será a energia produzida?

**Solução:**

Inicialmente vamos montar a tabela, agrupando os valores de mesma espécie na mesma coluna:

| Área ($m^2$) | Energia (W/h) |
|---|---|
| 1,2 | 400 |
| 1,5 | x |

Agora perceba que aumentando a área de absorção (seta para baixo na 1ª coluna) iremos coletar mais energia solar (seta para baixo na 2ª coluna). Assim, existe uma relação de proporcionalidade direta entre a área e a energia. Como as duas setas estão no mesmo sentido, escreve-se a proporção do mesmo modo que está organizada na tabela: $\frac{1,2}{1,5} = \frac{400}{x} \Rightarrow x = 500$

2) Um carro vai da cidade A para a cidade B com uma velocidade constante de 60 km/h, percorrendo a distância em 2 horas. Quantas horas levará o carro para ir de A até B com uma velocidade média de 40 km/h.

**Solução:**

| velocidade (km/h) | tempo (h) |
|---|---|
| 60 | 2 |
| 40 | x |

Observe que aumentando a velocidade do carro (flecha para cima) o tempo de percurso diminui (flecha para baixo), ou seja, velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais. Logo, deve-se inverter, em relação de como foram escritas na tabela, uma das razões para montar a proporção:

$\frac{2}{x} = \frac{40}{60} \Rightarrow x = 3\ h$

3) (ESA-93) Dez pessoas realizam um trabalho em 15 dias. Seis pessoas fariam o mesmo trabalho em:

a) 9 dias b) 10 dias c) 15 dias d) 20 dias e) 25 dias

**Solução:**

| nº de pessoas | tempo (dias) |
|---|---|
| 10 | 15 |
| 6 | x |

Neste caso fica evidenciado que aumentando o número de pessoas (flecha para cima) o tempo para realizar o trabalho diminui (flecha para baixo), ou seja, número de trabalhadores e tempo são grandezas inversamente proporcionais. Logo, deve-se inverter, em relação de como foram escritas na tabela, uma das razões para montar a proporção:

$$\frac{10}{6} = \frac{15}{x} \Rightarrow 10x = 90 \Rightarrow x = 9 \text{ dias}$$

**4)** (ENEM-10) Em abril de 2009, o observatório espacial americano *Swift* captou um feixe de raios gama proveniente de uma explosão no espaço. Cientistas italianos e ingleses apresentaram conclusões de que as luzes captadas provêm do colapso de uma estrela ocorrido há 13 bilhões de anos, apenas 630 milhões de anos após o *Big Bang*, expansão súbita que originou o Universo. Batizada de GRB 090423, a estrela é o objeto celeste mais antigo já observado pelo homem.

Revista Veja. 4 nov. 2009 (adaptado).

Suponha uma escala de 0 h a 24 h e considere que o *Big Bang* ocorreu exatamente à 0 h. Desse modo, a explosão da estrela GRB 090423 teria ocorrido à(s)

a) 1,10 h. b) 1,16 h. c) 1,22 h. d) 1,84 h. e) 2,01 h.

**Solução: Alternativa A**

É possível resolver esta questão aplicando regra de 3 simples. O tempo decorrido após o Big Bang e o tempo decorrido numa escala de 0 a 24h são grandezas diretamente proporcionais. Pela regra das flechas:

| tempo após o Big Bang (em milhões de anos) | | tempo numa escala de 24 h (em h) | |
|---|---|---|---|
| 13 630 | | 24 | |
| 630 | | t | |

$$\text{Assim: } \frac{13630}{630} = \frac{24}{t} \Rightarrow t = \frac{24.630}{13630} \Rightarrow t = 1{,}10 \text{ h}$$

## 5.4. REGRA DE TRÊS COMPOSTA

### 5.4.1. Análise algébrica

Do exposto sobre regra de três simples pode-se resolver uma série de problemas em que duas grandezas são direta ou inversamente proporcionais. Mas agora você deve estar se perguntando como é que se faz quando o problema apresentar mais de duas grandezas envolvidas? De início é interessante destacar a dependência entre as grandezas quando a quantidade destas não permite aplicar simplesmente a regra de três simples. Por exemplo, tomemos a conhecida equação de Clayperon PV = nRT, onde P é a pressão do gás, V seu volume, n seu número de mols, R a constante universal dos gases e T a temperatura absoluta (medida em Kelvins). Nesta equação, mantendo-se constantes os valores de V e n, aumentando-se a pressão de P para kP a temperatura absoluta aumentará de T para kT. Isto implica que pressão e temperatura absoluta de um gás são grandezas diretamente proporcionais. Por outro lado, mantendo-se constantes n e T, ao variar-se a pressão de P para kP, o volume passará de V para V/k, ou seja, pressão e volume são inversamente proporcionais.

É claro que de posse da equação que relaciona as variáveis do problema a determinação de algum dos valores desconhecidos é simples. Mas, e quando a equação não é fornecida? A resposta é simples, é preciso determiná-la. Por exemplo, tome o seguinte problema: uma pessoa, digitando 60 toques por minuto e trabalhando 6 horas por dia, realiza certo trabalho em 10 dias. Quantos dias levará outra pessoa para realizar o mesmo trabalho se ela digita 50 toques por minuto e trabalha 4 horas por dia? Na resolução deste problema considere as seguintes variáveis: T é o número de toques por minuto, H é o número de horas trabalhadas por dia e D é a quantidade de dias de trabalho. Note que o número de toques feitos em um dia é igual a 60TH. Assim, se N é o número total de toques necessários para fazer todo o trabalho, pode-se afirmar que N = 60THD. Logo, T é inversamente proporcional a H, T é inversamente proporcional a D e H é inversamente proporcional a D. Como o tamanho do trabalho é o mesmo, pode-se igualar as seguintes expressões:

$$60T_1H_1D_1 = 60T_2H_2D_2 \Rightarrow 60.6.10 = 50.4.D_2 \Rightarrow D_2 = 18 \text{ dias}$$

Neste ponto é interessante destacar um erro comum que é a aplicação da seguinte regra: duas grandezas são diretamente proporcionais se, mantendo-se constantes as outras variáveis envolvidas, o aumento de uma delas provoca aumento na outra e são inversamente proporcionais se o aumento de uma delas provoca a diminuição da outra. Perceba que para ficar configurada a proporção (direta ou indireta) é necessário que as variações percentuais das duas grandezas devem ser as mesmas (no caso de proporção direta) ou a variação percentual de uma grandeza deve ser o inverso da variação percentual da outra grandeza (no caso

de proporção indireta). Por exemplo, na equação de Clayperon, mantendo-se constantes os valores de pressão e número de mols, ao passarmos o volume de V para 3V, a temperatura absoluta passará de T para 3T. Se o volume passar de V para 9V, a temperatura passará de T para 9T e assim por diante. Assim, volume e temperatura de um gás são grandezas diretamente proporcionais. Por outro lado, na conhecida fórmula, atribuída a Isaac Newton, da atração entre dois corpos de massas M e m separados por uma distância d: $F = \frac{GMm}{d^2}$ (onde G é a constante gravitacional universal) pode-se observar que para uma variação de d para k.d a força passa de F para $F/k^2$. É claro que o aumento da distância provocou a diminuição da força, mas **não** pode-se afirmar que F e distância são inversamente proporcionais. Na verdade, força e o quadrado da distância é que são inversamente proporcionais, uma vez que um aumento do quadrado da distância de $d^2$ para $k.d^2$ implica em uma diminuição da força de F para F/d.

### 5.4.2. Regra das flechas

A regra das flechas aplicada à regra de três de composta é bastante emelhante ao caso da regra de três simples. Porém, como o número de grandezas gora é maior, deve-se ter um maior cuidado na análise do tipo de roporcionalidade (direta ou indireta) envolvida entre as grandezas. A tabela que é montada no caso da regra de três simples também é montada no caso da regra de três composta, com os valores de mesma grandeza na mesma coluna e os valores de mesma situação em cada linha.

A análise deve ser feita tomando-se como base a variável que possui um valor desconhecido (que será chamada de variável X) e analisando como uma alteração de seu valor implica na alteração do valor de cada uma das outras variáveis, mantendo-se constantes as demais grandezas. Se um aumento do valor de X provoca um aumento de outra variável A (mantendo constantes as outras grandezas), a flecha de A deve ficar no mesmo sentido que o de X. Por outro lado, se um aumento de X provoca uma diminuição de outra variável B (mantendo constantes as outras grandezas), a flecha de B deve ficar em sentido contrário ao de X.

Após esta análise, a equação da proporção envolvendo todas as grandezas é baseada em duas propriedades da proporção:

i) se uma grandeza é diretamente proporcional a outras duas, então é proporcional ao produto destas duas grandezas;

ii) se uma grandeza é inversamente proporcional a outra grandeza, então é diretamente proporcional ao inverso desta.

Assim, a equação que relaciona todas as razões é montada colocando-se no membro esquerdo da igualdade a razão que envolve a grandeza que possui um valor desconhecido e no membro direito a multiplicação das demais razões, mantendo-se o sentido da razão da grandeza que for diretamente proporcional à grandeza desconhecida e invertendo-se (elevando a − 1) a razão da grandeza que for inversamente proporcional à grandeza desconhecida.

Por exemplo, se na análise da um problema que abranja quatro grandezas, digamos x, y, z e w, a grandeza que possui um valor desconhecido é x (geralmente o valor desconhecido é na segunda situação) e conclua-se que a grandeza x é diretamente proporcional às grandezas y e z e inversamente proporcional à grandeza w, em relação aos valores destas grandezas medidos nas situações 1 e 2 tem-se a seguinte tabela:

| x ↑ | y ↑ | z ↑ | w |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ | $w_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ | $w_2$ ↓ |

Logo, a equação que relaciona as grandezas x, y, z e w é dada por:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{w_2}{w_1}$$

De posse desta equação o valor de $x_2$ é facilmente determinado:

$$x_2 = \frac{x_1 . y_2 . z_2 . w_1}{y_1 . z_1 . w_2}$$

## Exercícios Resolvidos

1) Em 8 horas, 20 caminhões descarregam $160m^3$ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar $125m^3$?

**Solução:**

Vamos começar analisando as relações que existem entre as grandezas envolvidas. Quando aumentamos o número de caminhões o tempo requerido para o descarregamento diminui, ou seja, número de caminhões e tempo são inversamente proporcionais. Por outro lado, quando aumentamos o número de caminhões também aumentamos a capacidade de areia que pode ser descarregada. Assim, número de caminhões e volume de areia são grandezas diretamente proporcionais. Assim, podemos montar a seguinte tabela.

| tempo (h) ↑ | caminhões | volume ($m^3$) |
|---|---|---|
| 8 | 20 | 160 |
| 5 | x ↓ | 125 ↓ |

Agora basta igualar a razão que envolve a grandeza desconhecida com o produto das outras razões, seguindo o sentido de cada flecha (se a flecha concordar com o sentido da flecha da variável mantém-se a proporção, caso contrário inverte-se a proporção).

$$\frac{20}{x} = \frac{160}{125}.\frac{5}{8} \Rightarrow x = 25 \text{ caminhões}$$

**2)** (EPCAr-02) Uma fábrica recebeu uma encomenda de 50 aviões. A fábrica montou os aviões em 5 dias, utilizando 6 robôs de mesmo rendimento, que trabalharam 8 horas por dia. Uma nova encomenda foi feita, desta vez 60 aviões. Nessa ocasião, um dos robôs não participou da montagem. Para atender o cliente, a fábrica trabalhou 12 horas por dia. O número de dias necessários para que a fábrica entregasse as duas encomendas foi

a) exatamente 10 b) mais de 10 c) entre 9 e 10 d) menos de 9

**Solução: Alternativa C**

Desde que o aumento do número de dias provoca um aumento de aviões fabricados, conclui-se que dias e aviões são diretamente proporcionais. Por outro lado, aumentando o número de dias de trabalho, serão necessárias menos horas de trabalho, ou seja, dias e horas de trabalho são inversamente proporcionais. Finalmente, aumentando o do número de dias, mantendo constante o número de aviões fabricados, provoca uma diminuição do número de robôs. Assim, analisando a dependência entre as grandezas, tem-se a seguinte tabela:

| aviões | | dias | | robôs | | horas (h) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | ↓ | 5 | ↓ | 6 | ↑ | 8 | ↑ |
| 60 | ↓ | x | ↓ | 5 | | 12 | |

Assim: $\frac{5}{x} = \frac{50}{60}.\frac{5}{6}.\frac{12}{8} \Rightarrow x = 4{,}8$ dias

Como a 1ª encomenda será entregue em 5 dias e a 2ª em 4,8 dias, as duas encomendas serão entregue em 9,8 dias, ou seja, a alternativa correta é letra C.

**3)** (Colégio Naval-96) Se K abelhas, trabalhando K meses do ano, durante K dias no mês e durante K horas por dia, produzem K litros de mel; então o número de litros de mel produzidos por W abelhas, trabalhando W horas por dias, em W dias e W meses do ano será:

a) $\frac{K^3}{W^2}$ b) $\frac{W^5}{K^3}$ c) $\frac{K^4}{W^3}$ d) $\frac{W^3}{K^4}$ e) $\frac{W^4}{K^3}$

**Solução: Alternativa E**

Analisando as proporções sobre as grandezas conclui-se que:

- quanto mais abelhas mais mel é produzido: diretamente proporcionais

- se aumentarmos os meses de produção o mel também aumentará: diretamente proporcionais
- um aumento no número dias também aumenta a produção de mel: diretamente proporcionais
- mais horas trabalhadas fazem com que mais mel seja produzido: diretamente proporcionais

Montando a tabela:

| abelhas | meses | dias | horas | horas |
|---|---|---|---|---|
| K | K | K | K | K |
| W | W | W | W | x |

Assim: $\frac{K}{x} = \frac{K}{W}.\frac{K}{W}.\frac{K}{W}.\frac{K}{W} \Rightarrow x = \frac{W^4}{K^3}$

**4)** (EPCAr-01) Se gato e meio comem rato e meio em um minuto e meio, quantos gatos comem 60 ratos em 30 minutos?

a) 3 b) 4 c) 3,5 d) 4,5

**Solução: Alternativa A**

Pode-se observar que:

- se aumentarmos o número de ratos serão necessários mais gatos para comê-los no mesmo tempo, ou seja, gatos e ratos são diretamente proporcionais.
- aumentando o tempo tem-se que diminuir o número de gatos para comer a mesma quantidade de ratos, fazendo com que gatos e tempo sejam inversamente proporcionais.

Monta-se, assim, a seguinte tabela:

| gatos (h) | ratos | minutos |
|---|---|---|
| 1,5 | 1,5 | 1,5 |
| x | 60 | 30 |

Portanto: $\frac{1,5}{x} = \frac{1,5}{60}.\frac{30}{1,5} \Rightarrow x = 3$ gatos

**5)** Se 6 digitadores, em 18 dias de 8 horas, preparam 720 páginas de 30 linhas, com 40 letras por linha, em quantos dias de 7 horas, 8 digitadores comporão 800 página, de 28 linhas por página e 45 letras por linha?

**Solução:**

Observando as proporções de cada par de grandezas:

- aumentando o número de dias, para o mesmo tamanho do trabalho, serão necessários menos digitadores, ou seja, dias e digitadores são inversamente proporcionais.
- quantos mais dias de trabalho, menos horas por dia serão usadas: inversamente proporcionais

- mais dias de trabalho implicam em mais páginas digitadas: diretamente proporcionais.
- analogamente, mais dias fazem com que mais linhas sejam digitadas: diretamente proporcionais.
- finalmente, aumentando o número de dias mais letras serão digitadas: diretamente proporcionais.

Pela tabela tem-se que:

| digitadores | dias | horas | páginas | linhas | letras |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 18 | 8 | 720 | 30 | 40 |
| 8 | x | 7 | 800 | 28 | 45 |

Algebrizando obtém-se:

$$\frac{18}{x} = \frac{8}{6}.\frac{7}{8}.\frac{720}{800}.\frac{30}{28}.\frac{40}{45} \Rightarrow x = 18 \text{ dias}$$

6) (ENEM-09) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

a) 920 kg. b) 800 kg. c) 720 kg. d) 600 kg. e) 570 kg.

**Solução: Alternativa A**

Claramente se trata de uma clássica questão de regra de 3, que vai resolvida pela regra das flechas. Número de alunos e horas de trabalho por dia são grandezas inversamente proporcionais. Por outro lado, número de alunos e quilos de alimentos arrecadados por dia são grandezas diretamente proporcionais.

| alunos | horas por dia | quilos por dia |
|---|---|---|
| 20 | 3 | 12 |
| 50 | 4 | x |

Assim: $\frac{20}{50} = \frac{4}{3} \times \frac{12}{x} \Rightarrow x = 40$ kg por dia

Se durante os primeiros 10 dias são arrecadados 12 quilos por dia e nos 20 dias finais são arrecadados 40 kg por dia, no total são arrecadados $10 \times 12 + 20 \times 40 = 120 + 800 = 920$ kg.

## 5.5. PORCENTAGEM

Atualmente é muito comum, principalmente nos meios de comunicação, a utilização de expressões que representam aumentos ou reduções para 100 unidades da grandeza analisada. Por exemplo, a expressão "o salário foi aumentado em 10%" (lê-se **dez por cento**) significa que para cada R$ 100,00 de salário, foi dado um aumento de R$ 10,00. Do mesmo modo, quando afirma-se que 90% (lê-se **noventa por cento**) dos alunos da turma tiraram nota alta, quer-se dizer que, para cada 100 alunos da sala, 90 deles tiraram nota alta. Do exposto anteriormente, já é possível escrever uma definição mais criteriosa sobre o que é porcentagem.

**5.5.1. Definição:** Porcentagem é uma medida de quantidade com base em 100 unidades da grandeza analisada. Perceba que porcentagem é uma medida relativa ao total da grandeza. Desta maneira, sempre que é citado um valor de porcentagem, deve ficar bem claro sobre qual grandeza incide a porcentagem citada. A simples afirmação "João possui 40%" perde sentido se não for indicado sobre o quê João tem 40%. Pode ser que João possua 40% dos doces de uma casa, pode ser que João possua 40% dos votos em uma eleição para prefeitura ou então que João possua 40% do dinheiro repartido em uma herança.

### 5.5.2. Razão centesimal

Toda razão que tem como denominador o número 100 é denominada de razão centesimal. Por exemplo, $\frac{11}{100}$, $\frac{51}{100}$ e $\frac{329}{100}$ são razões centesimais. É possível representar uma razão centesimal na forma de porcentagem:

$\frac{19}{100} = 0,19 = 19\%$ (lê-se "**dezenove por cento**")

$\frac{545}{100} = 5,45 = 545\%$ (lê-se "**quinhentos e quarenta e cinco por cento**")

As expressões 19% e 545% são denominadas de taxas percentuais.

Generalizando, razão centesimal é toda fração da forma $\frac{x}{100}$. Logo, toda porcentagem pode ser escrita da forma $x\% = \frac{x}{100}$.

### 5.5.3. Cálculo de porcentagem

Para a determinação do valor correspondente à porcentagem de uma grandeza basta fazer a multiplicação da razão centesimal associada à porcentagem pela quantidade total da grandeza. Por exemplo, para calcular 15% de 600 kg de ferro, basta fazer: $\frac{15}{100}.600\ kg = 90\ kg$. Generalizando, para calcular x% de um valor M, basta calcular o valor da multiplicação $\frac{x}{100}.M$.

## Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-99) Tem-se 500 ml de soro glicosado a 5%. Quando se acrescentam 10 (dez) ampolas de 10 ml cada de glicose a 23%, a concentração do volume final do soro glicosado será:
a) 6,0% b) 6,3% c) 7,0% d) 7,3% e) 8,0%
**Solução: Alternativa E**
O total de glicose inicialmente no soro é igual a 5% de 500 ml:

$$x = \frac{5}{100}.500 = 25\ ml$$

Como são acrescentados 100 ml de soro a 23% de glicose, o total de glicose adicionado vale:

$$y = \frac{23}{100}.100 = 23\ ml$$

Uma vez que o soro final possui 600 ml, a porcentagem de glicose é:

$$\frac{25+23}{600}.100 = 8\%$$

2) (Colégio Naval-05) Uma máquina é capaz de fabricar, ligada durante um tempo inteiro de minutos T, $3^T$ peças, sendo que 20% delas são defeituosas. Para obter-se, no mínimo, 605 peças perfeitas essa máquina deverá funcionar quantos minutos?
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8
**Solução: Alternativa D**
Se 20% das peças fabricadas são defeituosas então 80% são perfeitas. Assim:
$0{,}80.3^T \geq 605 \Rightarrow 3^T \geq 756{,}25$
Note que $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$
Desta forma, o menor inteiro T tal que $3^T \geq 756{,}25$ é T = 7 minutos

3) (EPCAr-01) Uma prova com 180 questões diferentes foi distribuída a 3 estudantes, A, B e C, de modo que cada estudante recebeu um bloco com 60 questões distintas. A apresentou 90% de acertos nas suas respostas; B respondeu

corretamente a 70% do seu bloco e C errou 80% de suas questões. Desta forma, o número de questões não resolvidas da prova é de (não resolvidas são as questões que os estudantes não acertaram).

a) 78 b) 72 c) 68 d) 80

**Solução: Alternativa B**

Pelo enunciado pode-se concluir que A errou 10% das suas questões, B errou 30% e C errou 80%. Como cada um recebeu 60 questões, o número total de questões erradas é:

$N = 0,10.60 + 0,30.60 + 0,80.60 = 6 + 18 + 48 = 72$

4) (OBM-99) Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada verificou-se que no aquário, 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?

A) 15% B) 37% C) 50% D) 67% E) 84%

**Solução: Alternativa D**

Se a quantidade inicial de peixes amarelos é x e a quantidade inicial de peixes vermelhos é y:

$x = 0,90(x + y) \Rightarrow x = 0,90x + 0,90y \Rightarrow 0,10x = 0,90y \Rightarrow x = 9y$

Suponha que depois da doença a quantidade de peixes amarelos no aquário seja igual a x'.

Pelo enunciado, depois da doença 75% dos peixes eram amarelos:

$x' = 0,75(x' + y) \Rightarrow x' = 0,75x' + 0,75y \Rightarrow 0,25x' = 0,75y \Rightarrow x' = 3y$

Assim, o percentual de peixes amarelos que morreram é igual a:

$$\frac{x - x'}{x}100\% = \frac{9y - 3y}{9y}100\% = \frac{6}{9}100\% = 67\%$$

5) (IME-86) Uma padaria trabalha com 4 tipos de farinha cujos teores de impureza são os seguintes:

| Tipo | Teor |
|---|---|
| A | 8% |
| B | 12% |
| C | 16,7% |
| D | 10,7% |

Para fabricar farinha do tipo D, o padeiro mistura uma certa quantidade de farinha A com 300 gramas de farinha tipo B; em seguida, substitui 200 gramas dessa mistura por 200 gramas de farinha tipo C.

Determine a quantidade de farinha tipo A utilizada.

**Solução:**

Suponha que m é a quantidade usada da farinha A. Como a impureza percentual da farinha A é de 8%, então a massa de impureza devido à farinha A na primeira mistura vale $m_A = 0{,}08.m$.

Do mesmo modo, a massa de impureza devido à farinha B na primeira mistura vale 12% de 300 g: $m_B = 0{,}12.300 = 36$ g

Assim, a impureza percentual da primeira mistura vale:

$$x_1 = \frac{m_A + m_B}{m_{total}} = \frac{0{,}08.m + 36}{m + 300}$$

Note que, apesar de 200 g desta mistura serem retiradas, a impureza percentual se mantém. Assim, antes de misturar com 200 g da farinha C, a massa de impureza de m + 100 g desta mistura vale:

$$m_1 = \frac{0{,}08m + 36}{m + 300}.(m + 100) = \frac{(0{,}08m + 36)(m + 100)}{m + 300}$$

A massa da primeira mistura agora vale m + 100 gramas, pois 200 gramas foram retiradas.

200 gramas da farinha C possuem uma massa de impureza igual a:

$m_C = 0{,}167.200 = 33{,}4$ g

Como a impureza da mistura final deve ser de 10,7%:

$$0{,}107 = \frac{\frac{(0{,}08m + 36)(m + 100)}{m + 300} + 33{,}4}{m + 100 + 200} \Rightarrow$$

$$0{,}107 = \frac{\frac{0{,}08m^2 + 44m + 3600 + 33{,}4m + 10020}{m + 300}}{m + 300} \Rightarrow$$

$$0{,}107(m + 300)^2 = 0{,}08m^2 + 77{,}4m + 13620 \Rightarrow$$

$$0{,}107m^2 + 64{,}2m + 9630 = 0{,}08m^2 + 77{,}4m + 13620 \Rightarrow$$

$$0{,}027m^2 - 13{,}2m - 3990 = 0 \Rightarrow 9m^2 - 4400m - 1330000 = 0$$

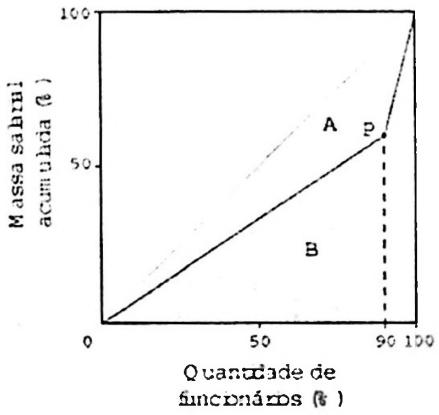
Resolvendo esta equação de 2º grau:

$$m = \frac{4400 \pm \sqrt{(-4400)^2 - 4(9)(-1330000)}}{18} = \frac{4400 \pm \sqrt{67240000}}{18} = \frac{4400 \pm 8200}{18} \Rightarrow$$

$m = \cancel{\frac{-1900}{9}}$ (não convém pois $m > 0$) ou $m = 700$ g

6) (ENEM-16) A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos 10% que recebem os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto P, cuja abscissa tem valor igual a 90, como ilustrado na figura.

No eixo horizontal do gráfico tem-se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários.




O índice de Gini, que mede o grau de concentração de renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão $\frac{A}{A+B}$, em que A e B são as medidas das áreas indicadas no gráfico.

A empresa tem como meta tornar seu índice de Gini igual ao do país, que é 0,3. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos 10% dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial.

Disponível em: www.ipea.gov.br. Acesso em: 4 maio 2016 (adaptado).

Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser

a) 40%  b) 20%  c) 60%  d) 30%  e) 70%

**Solução: Alternativa A**

Seja y a ordenada do ponto P. Assim, a área da região B vale:

$$B = \frac{90.y}{2} + \frac{(100+y).10}{2} = 45y + 500 + 5y = 50y + 500$$

A área da região A vale: $A = \frac{100.100}{2} - B = 5000 - 50y - 500 = 4500 - 50y$

Como $\frac{A}{A+B} = 0,3 \Rightarrow A = 0,3A + 0,3B \Rightarrow 0,7A = 0.3B \Rightarrow$

$0,7(4500 - 50y) = 0,3(50y + 500) \Rightarrow 3150 - 35y = 15y + 150 \Rightarrow$

$50y = 3000 \Rightarrow y = 60\%$

Observando o gráfico, percebe-se que 90% dos funcionários concentram 60% da massa salarial da empresa. Assim, o percentual da massa salarial recebido pelos 10% com maior salário é $100\% - 60\% = 40\%$.

### 5.5.4. Fator de Multiplicação

A regra apresentada anteriormente para cálculo de porcentagem é bastante útil quando deseja-se calcular apenas a porcentagem da grandeza. Nos casos em que o problema envolve um acréscimo ou decréscimo da grandeza há uma forma mais prática de determinar o valor final.

#### 5.5.4.1. Acréscimo

Uma vez que a razão centesimal associada à 100% é o número 1 ( $100\% = \frac{100}{100} = 1$ ) e a razão centesimal associada à uma porcentagem qualquer x% é o número $\frac{x}{100}$, então para determinar o resultado de um acréscimo de x% no valor da grandeza basta multiplicar o total da grandeza por $1 + \frac{x}{100}$. Por exemplo, para calcular o resultado do acréscimo de 10% no salário de R$ 390,00 de um empregado basta fazer $\left(1 + \frac{10}{100}\right)(\text{R\$ } 390{,}00) = (1{,}10)(\text{R\$ } 390{,}00) = \text{R\$ } 429{,}00$.

A tabela abaixo mostra alguns fatores de multiplicação relativos aos seus acréscimos:

| Acréscimo percentual (x%) | Fator de multiplicação (1 + x/100) |
|---|---|
| 10 | 1,10 |
| 20 | 1,20 |
| 50 | 1,50 |
| 100 | 2,00 |
| 200 | 3,00 |

É interessante destacar um erro muito comum envolvendo acréscimos porcentuais. Suponha a situação da realização de uma pesquisa de intenção de votos para uma eleição. Na pesquisa, o candidato X, que na pesquisa anterior possuía 20% das intenções, passa agora a possuir 25% das intenções. É **errado** afirmar que o candidato aumentou suas intenções em 5%. Na verdade, a forma correta é afirmar que as intenções de voto do candidato aumentaram em **5 pontos percentuais**. Ponto percentual é a medida absoluta da porcentagem, uma vez que não pode-se esquecer que porcentagem é uma medida relativa a 100 unidades de uma grandeza. Caso deseja-se calcular o crescimento percentual das intenções de voto deve-se resolver a seguinte equação:

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{25}{20} \Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{25}{20} - 1 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 25\%.$$

Logo, as intenções de voto do candidato aumentaram em 25%, passando de 20% para 25%. Um aumento de 5% sobre 20%, na verdade, passariam as intenções de voto ao candidato de 20% para $\left(1+\frac{5}{100}\right).20\% = 21\%$, e não para 25%.

### 5.5.4.2. Decréscimo

O caso de decréscimo é bastante semelhante ao caso de acréscimo, a diferença é que o fator de multiplicação para decréscimo vale $1-\frac{x}{100}$, onde x é a taxa percentual de decréscimo da grandeza. Por exemplo, se em 2019 um total de 20 alunos foram reprovados em uma escola e observou-se para 2020 uma redução de 30% na quantidade de alunos reprovados então, em valores absolutos, ficaram reprovados em 2020 exatamente $\left(1-\frac{30}{100}\right)(20) = (0,7)(20) = 14$ alunos.

A tabela abaixo mostra alguns fatores de multiplicação relativos aos seus acréscimos:

| Decréscimo percentual (x%) | Fator de multiplicação (1 – x/100) |
|---|---|
| 10 | 0,90 |
| 20 | 0,80 |
| 50 | 0,50 |
| 70 | 0,30 |
| 100 | 0 |

## Exercícios Resolvidos

1) (ENEM-13) O Conselho Monetário Nacional (CMN) determinou novas regras sobre o pagamento mínimo da fatura do cartão de crédito, a partir do mês de agosto de 2011. A partir de então, o pagamento mensal não poderá ser inferior a 15% do valor total da fatura. Em dezembro daquele ano, outra alteração foi efetuada: daí em diante, o valor mínimo a ser pago seria de 20% da fatura.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 29 fev. 2012.

Um determinado consumidor possuía no dia do vencimento, 01/03/2012, uma dívida de R$ 1000,00 na fatura de seu cartão de crédito. Se não houver pagamento do valor total da fatura, são cobrados juros de 10% sobre o saldo devedor para a próxima fatura. Para quitar sua dívida, optou por pagar sempre o mínimo da fatura a cada mês e não efetuar mais nenhuma compra.

A dívida desse consumidor em 01/05/2012 será de

a) R$ 600,00. b) R$ 640,00. c) R$ 722,50.
d) R$ 774,40. e) R$ 874,22.

**Solução: Alternativa D**

Em 01/03/2012 o consumidor vai pagar 20% do valor da fatura, ou seja, R$ 200,00 deixando uma dívida de R$ 800,00. Sobre este valor serão cobrados juros de 10% para a próxima fatura, ou seja, em 01/04/2012 a dívida será 1,1 × R$ 800,00 = R$ 880,00.

O consumir vai agora pagar 20% deste valor: 0,2 × R$ 880,00 = R$ 176,00, deixando uma dívida de R$ 880,00 – R$ 176,00 = R$ 704,00.

Para a próxima fatura serão cobrados juros de 10%, fazendo com que a dívida em 01/05/2012 será de 1,1 × R$ 704,00 = R$ 774,40

**2)** (Colégio Naval-89) Uma mercadoria que teve dois aumentos sucessivos de 30% e 20% deverá ter um único desconto de x% para voltar ao preço inicial. Logo:

a) $30 < x < 35$ b) $35 < x < 40$ c) $45 < x < 55$

d) $55 < x < 65$ e) $x > 65$

**Solução: Alternativa B**

Suponha que o valor inicial da mercadoria é y. Após o 1° aumento de 30% passar a valer $y_1 = 1{,}3y$.

Depois do 2° aumento de 20% passa a valer $y_2 = (1{,}2)(1{,}3y) = 1{,}56y$

O desconto de x% que faz com que o valor volte ao inicial é tal que:

$$(1-x)(1{,}56y) = y \Rightarrow 1-x = \frac{1}{1{,}56} \Rightarrow 1-x \cong 0{,}64 \Rightarrow x \cong 0{,}36 \Rightarrow x \cong 36\%$$

3) (Colégio Naval-06) Uma determinada conta a pagar de valor X vence no dia 30 de novembro, mas, se for paga até o dia 30 de setembro, tem 20% de desconto sobre X e, se for paga até o dia 31 de outubro, tem 10% de desconto sobre X. Alguém reservou o valor exato Y para pagar essa conta no dia 30 de setembro, no entanto esqueceu-se de fazê-lo e só efetuou esse pagamento no dia 31 de outubro. Qual a porcentagem a mais sobre Y que terá de pagar?

a) 10% b) 12,5% c) 17,5% d) 20% e) 25%

**Solução: Alternativa B**

Pagando dia 30/09 desembolsa-se Y = 0,8X e pagando dia 31/10 desembolsa-se 0,9X. Logo, o valor pago a mais em relação a Y vale:

$$\frac{0{,}9X}{0{,}8X} = 1 + \frac{i}{100} \Rightarrow 1{,}125 = 1 + \frac{i}{100} \Rightarrow i = 12{,}5\%$$

**4)** (AFA-07) Apliquei meu capital da seguinte maneira: 30% em caderneta de poupança, 40% em letras de câmbio e o restante em ações. Na 1ª aplicação, lucrei 20%; na 2ª, lucrei 30% e na 3ª perdi 25%. Se o resultado final corresponde a um lucro de x% sobre o capital aplicado, então x é igual a.

a) 7,5 b) 10,5 c) 15 d) 17

**Solução: Alternativa B**

Seja C o valor do capital investido. Na caderneta foram investidos 0,3C, em letras foram 0,4C e em ações foram 0,3C. O retorno da aplicação em caderneta foi de (1,2)(0,3C) = 0,36C, o retorno em letras foi de (1,3)(0,4C) = 0,52C e o retorno em ações foi de (0,75)(0,3C) = 0,225C. Logo, o retorno total dos investimentos foi de 0,36C + 0,52C + 0,225C = 1,105C.

Assim, o lucro final foi de: $\frac{1{,}105.\not{C}}{\not{C}} = 1 + \frac{x}{100} \Rightarrow x = 10{,}5\%$

**5)** (OBM-98) Seu Horácio resolveu incrementar a venda de CDs em sua loja e anunciou uma liquidação para um certo dia, com descontos de 30% sobre o preço das etiquetas. Acontece que, no dia anterior à liquidação, seu Horário aumentou o preço marcado nas etiquetas, de forma que o desconto verdadeiro fosse de apenas 9%. De quanto foi o aumento aplicado por seu Horácio?

A) 30% B) 39% C) 21% D) 40% E) 31%

**Solução: Alternativa A**

Seja x o aumento percentual aplicado no dia anterior e P o preço inicial do CD.

Assim: $(1 - 0{,}30)(1 + x)P = (1 - 0{,}09)P \Rightarrow 0{,}70(1 + x) = 0{,}91 \Rightarrow$

$1 + x = 1{,}3 \Rightarrow x = 0{,}3 \Rightarrow x = 30\%$

**6)** (ENEM-15) Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.

Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

a) R$ 0,96. b) R$ 1,00. c) R$ 1,40. d) R$ 1,50. e) R$ 1,56.

**Solução: Alternativa C**

O lucro é igual à subtração entre a receita e o custo:

$1{,}2 \times 40 = 4 \times 20 \times p - 4 \times 16 \Rightarrow 48 = 80p - 64 \Rightarrow 80p = 112 \Rightarrow p = 1{,}4$

**7)** (Colégio Naval-03) João vendeu dois carros de modelos **SL** e **SR**, sendo o preço de custo do primeiro **20%** mais caro que o do segundo. Em cada carro teve um lucro de **20%** sobre os seus respectivos preços de venda. Se o total dessa venda foi **R$ 88 000,00**, o preço de custo do segundo modelo era, em reais, igual a.

a) 30 000,00 b) 32 000,00 c) 34 000,00

d) 35 000,00 e) 36 000,00

**Solução: Alternativa B**

Sejam $x_{SL}$ o preço de custo do carro modelo SL e $x_{SR}$ o preço de custo do carro modelo SR. Como $x_{SL}$ é 20% mais caro que $x_{SR}$ tem-se que $x_{SL} = 1{,}20.x_{SR}$

Sejam $y_{SL}$ e $y_{SR}$ os preços de venda dos modelos SL e SR, respectivamente.

Se o lucro de cada carro é igual a 20% do preço de venda:

$0{,}20.y_{SL} = y_{SL} - x_{SL} \Rightarrow x_{SL} = 0{,}80y_{SL}$

O mesmo vale para o modelo SR: $x_{SR} = 0{,}80y_{SL}$.

Somando obtém-se $x_{SL} + x_{SR} = 0.80(y_{SL} + y_{SR}) \Rightarrow$

$1{,}20.x_{SR} + x_{SR} = 0{,}80(88000) \Rightarrow 2{,}20x_{SR} = 70400 \Rightarrow x_{SR} = \text{R\$ } 32000{,}00$

8) (EPCAr-08) Um comerciante ao comprar livros que custavam x reais a unidade ficou ciente de que pagaria também um frete correspondente a 1,6% sobre o valor da compra. Ele resolveu pagar à vista após conseguir um desconto de 10% sobre o valor total dos livros, mas teve que assumir o valor original do frete, desembolsando, assim, R$ 2.748,00 pela aquisição. Na venda, ele deu um preço aos livros visando lucrar 50% sobre a tabela original, onde cada um custava x reais. Após vender 4/5 do total de livros, ele os remarcou reduzindo o preço de cada um, em 20% Depois de algum tempo, viu que havia vendido 2/3 do resto e ainda sobravam 10 livros, que foram doados a uma escola. Se na comercialização ele gastou R$ 252,00 a mais e ainda conseguiu, ao final, um lucro real de y% sobre todos os gastos, é correto afirmar que y é igual a

a) 20 b) 24 c) 30 d) 36

**Solução: Alternativa D**

Seja N a quantidade total de livros. Assim:

$$10 = N - \frac{4N}{5} - \frac{2}{3}\frac{N}{5} \Rightarrow 10 = \frac{N(15-12-2)}{15} \Rightarrow N = 150$$

Logo: $2748 = 0{,}90.N.x + 0{,}016.N.x \Rightarrow 2748 = 0{,}916.150.x \Rightarrow x = \text{R\$ } 20{,}00$

Se o comerciante visava vender os livros com um lucro de 50% então seu interesse era vender cada um dos livros por $z = (1{,}5)x = 1{,}5(20) = \text{R\$ } 30{,}00$

Segundo o enunciado 4/5 dos 150 livros foram vendidos por este preço, que dá uma receita de: $R_1 = \frac{4}{5}N.z = \frac{4}{5}.150.30 \Rightarrow z = \text{R\$ } 3600{,}00$

A segunda receita é dada por:

$$R_2 = \frac{2}{3}\frac{N}{5}(1-0{,}2)z = \frac{2}{3}\frac{150}{5}0{,}8.30 \Rightarrow R_2 = \text{R\$ } 480{,}00$$

O lucro é dado por:

$L = R_1 + R_2 - C_1 - C_2 = 3600 + 480 - 2748 - 252 = \text{R\$ } 1080{,}00$

Desta forma, o lucro percentual vale:

$$y = \frac{L}{C_1 + C_2} = \frac{1080}{2748 + 252} = 0{,}36 \Rightarrow y = 36\%$$

## 5.6. JUROS

Antes de começar o estudo dos juros é necessário definir alguns conceitos que serão usados com freqüência nas situações propostas.

### 5.6.1. Definições:

- **Capital inicial (C)**: valor em dinheiro inicialmente utilizado na aplicação;
- **Taxa de juros (i)**: taxa percentual que é aplicada para o acréscimo do capital por período da aplicação. Sempre vem acompanhada do período da aplicação, por exemplo 5% a.a. (5% ao ano), 15% a.t. (15% ao trimestre), 1% a.m. (1% ao mês) ou 2% a.s. (2% ao semestre). De modo a simplificar os cálculos, é padrão dentro do cálculo de juros considerar os 12 meses do ano contendo exatamente 30 dias, bem como o ano sendo composto por 360 dias;
- **Juros (J)**: valor em dinheiro que deve ser pago a mais em relação ao capital inicial, devido a aplicação da taxa de juros, no final da aplicação;
- **Período da aplicação**: intervalo de tempo que se passa entre duas aplicações consecutivas de juros;
- **Tempo**: número de períodos da aplicação. É igual ao número de parcelas pagas. Por exemplo, em uma aplicação a juros simples de 18% a.a., a ser paga em 145 dias, o valor da taxa de juros ao dia é igual a $\frac{18\%}{360} = 0{,}05\%$, o período da aplicação é diário e o tempo é de 145 dias;
- **Parcela**: valor a ser pago a cada período da aplicação;
- **Montante (M)**: valor total pago ao final da aplicação. É igual ao capital inicial acrescido dos juros;
- **Juros simples**: ocorre quando a taxa de juros incidir somente sobre o capital inicial. Nos juros simples os juros gerados a cada período não incidem novos juros, fazendo com que o valor a ser somado a cada parcela seja constante;
- **Juros compostos**: ocorre quando os juros gerados a cada período são incorporados no cálculo dos juros no período seguinte.

### 5.6.2. Juros simples

O regime de juros será simples quando a taxa percentual de juros incidir somente sobre o valor principal. Desta forma, os juros por período são iguais, bastando somá-los para determinar o valor total dos juros da aplicação:

$$J = C.i.t$$

Por exemplo, suponha que você deseja calcular quando vai ter que pagar a mais em relação ao capital inicial em uma aplicação a juros simples de 2% a.m. com capital inicial de R% 10.000,00 pagando 12 parcelas. Aplicando na fórmula: J = (R$ 10.000,00)(0,02)(12) = R$ 2.400,00

Para o cálculo do montante basta somar os juros ao capital inicial:

$$M = C(1 + i.t)$$

Por exemplo, para calcular o montante de uma aplicação de R$ 1.200,00 a juros simples de 12% a.t. durante 4 meses e 15 dias, inicialmente deve-se observar que em um trimestre existem 6 quinzenas e que em 4 meses e 15 dias existem 9 quinzenas. Logo, a taxa de juros por quinzena vale $\frac{12\%}{6} = 2\%$ e o tempo da aplicação é de 9 quinzenas. Desta maneira:
M = (R$ 1.200,00)[1 + (0,02)(9)] = R$ 1.416,00

## Exercícios Resolvidos

1) (UFPA-00) André devia, em seu cartão de crédito, R$ 1.000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R$ 1.440,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?
a) 7,2 % b) 14,4 % c) 20 % d) 22 % e) 44 %
**Solução: Alternativa D**
$M = C(1 + i.t) \Rightarrow 1440 = 1000(1 + i.2) \Rightarrow 1 + 2i = 1,44 \Rightarrow i = 0,22 \Rightarrow i = 22\%$

2) (EPCAr-05) A diferença entre dois capitais é de R$ 200.00, estando o maior aplicado a juros simples de 20% ao ano e o menor a juros simples de 30% ao ano. Sabendo-se que os dois capitais produzem os mesmos juros após 1852 dias, pode-se concluir que o capital maior é
Obs.: Considere um ano comercial igual a 360 dias.
a) R$ 400.00 b) R$ 500.00 c) R$ 600.00 d) R$ 700,00
**Solução: Alternativa C**
Na 1ª aplicação a taxa de juros ao dia vale $\frac{20\%}{360} = \frac{1}{18}\%$, enquanto que na 2ª aplicação a taxa de juros é igual a $\frac{30\%}{360} = \frac{1}{12}\%$. Logo, igualando os juros produzidos após 1852 em cada aplicação:

$C_1.i_1.t = C_2.i_2.t \Rightarrow C_1.\frac{1}{1800}.1852 = C_2.\frac{1}{1200}.1852 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}C_1$

Assim: $C_1 - C_2 = 200 \Rightarrow C_1 - \frac{2}{3}C_1 = 200 \Rightarrow C_1 = R\$\ 600,00$

3) (Colégio Naval-88) Dois capitais são empregados a uma mesma taxa de 3% ao ano. A soma dos capitais é igual a Cr$ 50.000,00. Cada capital produz Cr$ 600,00 de juros. O primeiro permaneceu empregado 4 meses mais que o segundo. O segundo capital foi empregado durante.

a) 6 meses b) 8 meses c) 10 meses d) 2 anos e) 3 anos

**Solução: Alternativa B**

Uma taxa de juros simples de 3% ao ano corresponde a uma taxa mensal de $i = \frac{3\%}{12} = \frac{1}{4}\% = \frac{1}{400}$.

Como o primeiro capital ficou aplicado 4 meses a mais que o segundo:

i) $J = C_1.i.(t+4) \Rightarrow 600 = C_1.\frac{1}{400}.(t+4) \Rightarrow C_1(t+4) = 240000$ (1)

ii) $J = C_2.i.t \Rightarrow 600 = C_2.\frac{1}{400}.t \Rightarrow C_2.t = 240000 \Rightarrow t = \frac{240000}{C_2}$ (2)

Substituindo a equação (2) em (1):

$$C_1\left(\frac{240000}{C_2} + 4\right) = 240000 \Rightarrow \frac{C_1(240000 + 4C_2)}{C_2} = 240000$$

Uma vez que $C_1 + C_2 = 50000$: $(50000 - C_2)(240000 + 4C_2) = 240000C_2 \Rightarrow$

$12000000000 + 200000C_2 - 240000C_2 - 4C_2^2 = 240000C_2 \Rightarrow$

$C_2^2 + 70000C_2 - 3000000000 = 0 \Rightarrow$

$$C_2 = \frac{-70000 \pm \sqrt{(70000)^2 - 4(1)(-3000000000)}}{2} = \frac{-70000 \pm 130000}{2} \Rightarrow$$

$C_2 = -100000$ (não convém pois $C_2 > 0$) ou $C_2 = 30000$

Logo: $t = \frac{240000}{C_2} = \frac{240000}{30000} = 8$ meses

4) (EPCAr-04) Uma pessoa aplica certa quantia em dinheiro a juros simples de 5% ao ano. No fim do primeiro ano, reúne o capital e os juros. Coloca $\frac{5}{7}$ da nova quantia a juros simples de 4% ao ano e o restante também a juros simples de 6% ao ano. Recebe, assim, R$ 672,00 de juros no final de 2 anos. Com base nisso, pode-se afirmar que o capital primitivo é um número cujo algarismo da centena é igual a

a) 7 b) 5 c) 3 d) 0

**Solução: Alternativa D**

Seja C o valor do capital inicialmente aplicado. Como os juros são de 5% a.a. e a aplicação é durante um ano, o montante recolhido após a 1ª aplicação vale 1,05C.

A quantia que fica aplicada a 4% a.a. é igual a $\frac{5}{7}(1,05C) = 0,75C$ e o restante, 0,3C, é aplicado a 6% a.a.

Logo: $J = J_1 + J_2 \Rightarrow 672 = (0,75C)(0.04)(2) + (0,3C)(0.06)(2) \Rightarrow$
$672 = 0,06C + 0.36C \Rightarrow 0,097C = 672 \Rightarrow C = R\$\ 7000,00$

5) (FGV-05) Um investidor aplicou na mesma data, por 20 dias, em fundos diferentes que operam no sistema de juro simples, os capitais de R$ 110000,00 e R$ 80000,00. No final do período o maior valor, aplicado à taxa de 9% ao mês, rendeu, de juro, R$ 3400,00 a mais que a aplicação do menor valor. Determine a taxa mensal de juros de aplicação do menor valor.

**Solução:**

Uma taxa de juros de 9% ao mês equivale a uma taxa de $i_1 = \frac{9\%}{30} = 0,3\%$ ao dia.

Assim: $J_1 = J_2 + 3400 \Rightarrow C_1.i_1.t = C_2.i_2.t + 3400 \Rightarrow$
$(110000)(0,003)(20) = (80000)i_2(20) + 3400 \Rightarrow 6600 = 1600000.i_2 + 3400 \Rightarrow$
$i_2 = 0,002 \Rightarrow i_2 = 0,2\%$ ao dia $\Rightarrow i_2 = (30)(0,2\%) = 6\%$ ao mês

6) (ENEM-11) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

| | Rendimento mensal (%) | IR (imposto de renda) |
|---|---|---|
| POUPANÇA | 0,560 | ISENTO |
| CDB | 0,876 | 4% (sobre o ganho) |

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.

b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.

c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.

d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.

e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

**Solução: Alternativa D**

Montante da poupança: $x_{poupança} = R\$\ 500,00 \times 1,0056 = R\$\ 502,80$
Rendimento do CDB: $r_{CDB} = R\$\ 500,00 \times 1,00876 = R\$\ 504,38$
Imponto e Renda do CDB: $IR_{CDB} = (R\$\ 504,38 - R\$\ 500,00) \times 0,04 = R\$\ 0,1752$
Montante do CDB: $x_{CDB} = r_{CDB} - IR_{CDB} = R\$\ 504,38 - R\$\ 0,1752 = R\$\ 504,2048$
Assim, a aplicação mais vantajosa é o CDB, cujo montante é aproximadamente R$ 504,21.

### 5.6.3. Juros compostos

O sistema de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro, utilizado em praticamente 100% das aplicações financeiras em nosso país. Na verdade estuda-se os juros simples mais para dar uma introdução aos conceitos sobre juros, sendo sua aplicação muito reduzida. Nos juros compostos os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros no período seguinte. Chama-se de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao capital. Por exemplo, suponha que um capital C foi aplicado em uma caderneta de poupança cuja taxa de juros ao mês é igual a i. Assim, mês a mês tem-se as seguintes relações para os montantes:

após o 1° mês: $M = C.(1 + i)$
após o 2° mês: $M = C.(1 + i)^2$
após o 3° mês: $M = C.(1 + i)^3$
...
após o n° mês: $\mathbf{M = C.(1 + i)^n}$

Para um mesmo valor de taxa de juros, os juros compostos produzem um montante maior que uma aplicação a juros simples, uma vez que no caso dos juros compostos os juros incidem sobre o montante, enquanto que no caso dos juros simples os juros incidem somente sobre o capital inicial. Por exemplo, uma aplicação, durante um ano, de R$ 1000,00 em uma caderneta de poupança com rendimento de 2% ao mês, no caso de juros simples produz um montante de:

$$M_{simples} = C(1 + i.t) = (1000)(1 + (0,02)(12)) = R\$\ 1240,00,$$

enquanto que no caso dos juros compostos gera um montante de

$$M_{composto} = C(1 + i)^n = (1000)(1 + 0,02)^{12} = R\$\ 1268,24.$$

É por isso que todas as aplicações e parcelamento de compras no mercado financeiro atual trabalham sobre a taxação de juros compostos.

#### 5.6.3.1. Rendas certas

Rendas Certas, Aplicações Constantes ou Anuidades são termos que se referem a aplicações sucessivas de capital **A**, remunerado a uma taxa de juros **i**, durante um período de tempo **n**, onde valor e taxa são constantes em cada período, segundo a fórmula:

$$\mathbf{R = A.\frac{(1+i)^n - 1}{i}}.$$

Por exemplo, considere que uma pessoa inicia uma caderneta de poupança aplicando todo mês R$ 100,00 com rendimento de 1% ao mês. Ao fazer o 12° depósito o seu saldo será:

$$R = A.\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 100.\frac{(1+0,01)^{12} - 1}{0,01} = 100.\frac{1,126825 - 1}{0,01} = R\$1.268,25.$$

Observação: É importante ter em mente que, no exemplo anterior, o último depósito não é capitalizado, por ter sido realizado no final do período. Logo, o último valor até se acumula ao montante, porém não tem a incidência de juros de remuneração.

## Exercícios Resolvidos

1) (Unesp-08) Cássia aplicou o capital de R$ 15.000,00 a juros compostos, pelo período de 10 meses e à taxa de 2% a.m. (ao mês). Considerando a aproximação $(1,02)^5 = 1,1$, Cássia computou o valor aproximado do montante a ser recebido ao final da aplicação. Esse valor é:

A) R$ 18.750,00. B) R$18.150,00. C) R$ 17.250,00.
D) R$17.150,00. E) R$16.500,00.

**Solução: Alternativa B**

Aplicando diretamente na fórmula:

$M = C(1 + i)^n = (15000)(1 + 0,02)^{10} = (15000)[(1,02)^5]^2 = (15000)(1,1)^2 =$
$= (15000)(1,21) \Rightarrow M = R\$\ 18150,00$

2) (FGV-17) Certo capital foi aplicado em regime de juros compostos. Nos quatro primeiros meses, a taxa foi de 1% ao mês e, nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês. Sabendo-se que, após os oito meses de aplicação, o montante resgatado foi de R$ 65.536,00, então o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a

Dado: $65\,536 = 2^{16}$

a) $3,66^8$. b) $3,72^8$. c) $3,78^8$. d) $3,88^8$. e) $3,96^8$.

**Solução: Alternativa E**

Montante ao final da 1ª aplicação: $M_1 = C.(1 + 0,01)^4$.

Montante ao final da 2ª aplicação: $M_2 = M_1.(1 + 0,02)^4 = C.(1,01)^4.(1,02)^4$

Assim: $65536 = C[(1,01)(1,02)]^4 \Rightarrow 4^8 = C\left(\sqrt{1,0302}\right)^8 \Rightarrow C \cong \left(\frac{4}{1,015}\right)^8 \Rightarrow$

$C \cong 3,94^8 \rightarrow$ a alternativa mais próxima é a E

3) (Fuvest-18) Maria quer comprar uma TV que está sendo vendida por R$ 1.500,00 à vista ou em 3 parcelas mensais sem juros de R$ 500,00. O dinheiro que Maria reservou para essa compra não é suficiente para pagar à vista, mas descobriu que o banco oferece uma aplicação financeira que rende 1% ao mês. Após fazer os cálculos, Maria concluiu que, se pagar a primeira parcela e, no mesmo dia, aplicar a quantia restante, conseguirá pagar as duas parcelas que faltam sem ter que colocar nem tirar um centavo sequer. Quanto Maria reservou para essa compra, em reais?

(A) 1.450,20 (B) 1.480,20 (C) 1.485,20 (D) 1.495,20 (E) 1.490,20

**Solução: Alternativa C**

Iniciando com x reais, tem-se:

i) mês 1: paga a 1ª parcela de R$ 500,00 e investe x – 500 a 1% a.m.

ii) mês 2: paga a 2ª parcela de R$ 500,00 e mantém investido:

$(x - 500).1,01 - 500$, ao juro de 1% a.m.

iii) mês 3: o rendimento ao final do período deve ser suficiente para pagar a 3ª parcel de R$ 500,00:

$[(x - 500).1,01 - 500].1,01 = 500 \Rightarrow 1,0201x = 1515,05 \Rightarrow x \cong$ R$ 1485,20

**4)** (Unesp-05) Mário tomou um empréstimo de R$ 8.000,00 a juros de 5% ao mês. Dois meses depois, Mário pagou R$ 5.000,00 do empréstimo e, um mês após esse pagamento, liquidou todo o seu débito. O valor do último pagamento foi de:

A)R$ 3.015,00. B) R$ 3.820,00. D)R$ 5.011,00.

E) R$ 5.250,00. C) R$ 4.011,00.

**Solução: Alternativa C**

Dois meses depois de tomar o empréstimo, o valor total a ser pago para quitar o empréstimo vale:

$M_1 = C(1 + i)^n = (8000)(1 + 0,05)^2 =$ R$ 8820,00

Como Mário pagou R$ 5000,00, então ficou um saldo devedor de R$ 3820,00.

Depois de mais um mês, o montante agora vale:

$M_2 = C'(1 + i) = (3820)(1 + 0,05) \Rightarrow M_2 =$ R$ 4011,00

**5)** Depois de muitos anos economizando dinheiro, João resolveu realizar seu sonho de comprar um carro zero quilômetro. Na concessionária, João foi informado que o carro almejado por ele custava à vista R$ 40.000,00. Como não tinha todo esse valor, João resolveu fazer um financiamento, dando uma entrada de 50% do valor à vista e financiando os outros 50% em 12 parcelas, com uma taxa mensal de juros de 0,5%. Atualmente, de modo a não assustar o comprador com parcelas cujos valores vão crescendo, as financiadoras fazem com que, mantendo o montante gerado a juros compostos, o cliente pague todas as parcelas com o mesmo valor. Determine o valor de cada uma das 12 parcelas paga por João.

**Solução:**

O montante do financiamento dos R$ 20.000,00 em 12 meses com juros compostos de 0,5% ao mês é:

$M = C(1 + i)^n = (20000)(1 + 0,05)^{12} = (20000)(1,795856...) =$ R$ 35917,13

Como são 12 parcelas, o valor de parcela vale: $x = \frac{M}{12} = \frac{\text{R\$}35917,13}{12} =$ R$ 2993,09

## Exercícios propostos

**Razão entre duas grandezas**

1) (CM Brasília-03) Considere que um tanque possui 3 torneiras. Para enchê-lo, a 1ª gasta 2 horas, a 2ª três horas e a 3ª nove horas. Com as três torneiras abertas simultaneamente, o tanque ficará cheio em aproximadamente:
A ( ) 35 min B ( ) 64 min C ( ) 63 min D ( ) 67 min E ( ) 75 min

2) (CM Brasília-07) Nas férias de fim de ano, José e seus pais viajarão à Chapada dos Veadeiros. O pai de José pede a ele que faça uma previsão de custos para o combustível a ser consumido na viagem de ida e volta. Para tanto, seu pai lhe fornece os seguintes dados:
1) Consumo do carro: 12,5 km por litro.
2) Preço do combustível: R$ 2, 50 por litro.
3) Distância de Brasília a Chapada dos Veadeiros: 250 km.
Seu pai estimou, ainda, que percorrerá mais 25 km durante a viagem à Reserva. Com base nos dados fornecidos, pode-se afirmar que José estimou um custo de
A) R$ 55,00. B) R$ 75,00. C) R$ 100,00. D) R$ 105,00. E) R$ 110,00.

3) (CM Brasília-08) Uma escola de dança R$210,00 por um curso de 12 semanas. Quando um aluno se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida linearmente. A expressão que melhor representa a taxa de inscrição em função do número de semanas transcorridas desde o início do curso é:
A ( ) $T = 17{,}50\,(12 - x)$ B ( ) $T = 17{,}50$
C ( ) $T = 17{,}50x - 12$ D ( ) $T = 17{,}50\,(x + 12)$
E ( ) $T = 17{,}50x + 12$

4) (CM Brasília-08) Uma torneira enche um tanque em 30 minutos, enquanto uma segunda torneira gasta 20 minutos para encher o mesmo tanque. Sabendo-se que o tanque estava inicialmente vazio, abre-se a 1ª torneira durante t minutos. Ao fim desse tempo, fecha-se a torneira e abre-se a segunda que termina de encher o tanque em $t - 5$ minutos. O tempo total gasto para encher o tanque é:
A) 9 minutos B) 10 minutos C) 12 minutos D) 14 minutos E) 15 minutos

5) (CM Fortaleza-07) Daniel tem ração suficiente para alimentar quatro galinhas durante 18 dias. No fim do 6º dia, ele comprou mais duas galinhas. Com o restante da ração, ele poderá alimentar suas galinhas durante:
( a ) 2 dias. ( b ) 4 dias. ( c ) 6 dias. ( d ) 8 dias. ( e ) 10 dias.

6) (CM Manaus-09) Um artesão começa a trabalhar às 8 h e produz 6 braceletes a cada vinte minutos; seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão pára de trabalhar às 12 h, mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. O auxiliar irá parar às:
a) 12 h b) 12 h e 30 min c) 13 h d) 13 h e 30 min e) 14 h e 30 min

7) (CM Manaus-10) Uma torneira pode encher um tanque em 9 horas e outra pode encher o mesmo tanque em 12 horas. Se juntamente com estas duas torneiras fosse ligada uma terceira, o tanque ficaria cheio em 4 horas. Então, o tempo que a terceira torneira levaria para encher sozinha o tanque é de:
A) 12 horas B) 18 horas C) 20 horas D) 14 horas E) 16 horas

8) (CM Manaus-10) O automóvel de Júlia tem capacidade para 48 litros de combustível. Sempre atenta, Júlia abastece toda vez que seu veículo indica que está com apenas 1/4 da capacidade de combustível e completa o tanque. No posto em que ela costuma abastecer, a bomba de gasolina, quando aberta, despeja 2 litros a cada 6 segundos. Nestas condições, quanto tempo a bomba irá gastar para abastecer o veículo sem derramar nenhuma gota?
A) 2 minutos e 20 segundos B) 108 segundos
C) 2 minutos e 8 segundos D) 68 segundos
E) 98 segundos

9) (CM RJ-03) Carlos construiu uma piscina em sua casa, deixando dois canos para enchê-la e um ralo para esvaziá-la. Estando a piscina vazia, um dos canos, sozinho, permite que ela seja completamente cheia em 15 horas, e o outro cano, em 10 horas, se funcionar sozinho. Por outro lado, estando a piscina cheia, o ralo permite esvaziá-la completamente em 24 horas. Quando a obra acabou, Carlos resolveu encher a piscina, que estava vazia: abriu os dois canos, mas esqueceu de fechar o ralo. Quanto ao número de horas que a piscina demorou para ficar totalmente cheia, podemos afirmar que:
A) é um número primo. B) é um múltiplo de 4.
C) é um divisor de 15. D) é um divisor de 24 e de 10.
E) é um múltiplo de 15.

10) (CM RJ-06) Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto que uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante x minutos; ao fim desse tempo, fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em x + 3 minutos. Então, o tempo total gasto para encher o tanque é:
A) 12 minutos B) 15 minutos C) 18 minutos
D) 20 minutos E) 24 minutos

**11)** (CM RJ-09) Uma filmadora tem bateria suficiente para 12 horas desligada ou 4 horas ligada. Se a bateria durou 8 horas, quanto tempo a máquina esteve ligada?
(A) 230 minutos (B) 200 minutos (C) 180 minutos
(D) 150 minutos (E) 120 minutos

**12)** (CM Salvador-07) Rodrigo e Júnior trabalham carregando caminhões. Para carregar um caminhão, Rodrigo leva 20 minutos. Juntos, conseguem fazê-lo em 15 minutos. Em quanto tempo Júnior, sozinho, é capaz de carregar um caminhão?
(A) 15 minutos (B) 20 minutos (C) 35 minutos
(D) 45 minutos (E) 60 minutos

**13)** (CM Santa Maria-05) Uma caixa d'água possui uma tubulação que a alimenta e que a enche em x horas. Possui também um "ladrão" que a esvazia em x + 5 horas. A caixa d'água, quando vazia, enche em 30 horas com a tubulação e o "ladrão" funcionando simultaneamente. Se a tubulação entupir e a caixa d'água estiver cheia, em quanto tempo ficará novamente vazia?
a. ( ) 25 horas b. ( ) 15 horas c. ( ) 20 horas
d. ( ) 10 horas e. ( ) 30 horas

**14)** (UEMS-07) Cinco torneiras idênticas juntas enchem um tanque em 144 minutos. Quantas dessas torneiras são necessárias para encher o mesmo tanque em uma hora e meia?
a) seis torneiras b) sete torneiras c) oito torneiras
d) nove torneiras e) nove torneiras e meia

**15)** (UFRN-07) Duas velas, cada uma com 1m de comprimento, são feitas de modo que uma queime completamente 6 horas depois de ser acesa e a outra leve 4 horas para queimar. Se as velas forem acesas simultaneamente, o tempo necessário para que uma atinja duas vezes o comprimento da outra será
A) 2 horas. B) 3 horas. C) 4 horas D) 1 hora.

**16)** (UERGS-03) Um reservatório público de água possui cinco bombas hidráulicas de mesma vazão. Estando o reservatório com água pela metade, uma dessas bombas foi acionada e encheu o restante do reservatório em 4 horas. Se o reservatório estivesse vazio e as cinco bombas fossem acionadas simultaneamente, o reservatório encheria em
a) 80 minutos b) 96 minutos c) 120 minutos
d) 160 minutos e) 240 minutos

17) (Epcar-13) Para encher um reservatório com água, pode-se usar duas torneiras. A primeira torneira enche esse reservatório em 36 minutos. A segunda enche o mesmo reservatório em 24 minutos. Certo dia, em que esse reservatório estava vazio, a primeira torneira é aberta durante um período de k minutos. Ao fim de k minutos, a primeira torneira é fechada e abre-se, imediatamente, a segunda, que fica aberta por um período de (k + 3) minutos. Se o volume de água atingido corresponde a 2/3 da capacidade do reservatório, então o tempo total gasto foi
a) 31% de hora c) 28% de hora b) 30% de hora d) 27% de hora

18) (Colégio Naval-83) Um terreno deve ser dividido em lotes iguais por certo número de herdeiros. Se houvessem três herdeiros a mais, cada lote diminuiria de **20 m²** e, se houvessem quatro herdeiros a menos, cada lote aumentaria de **50 m²**. O número de metros quadrados da área do terreno todo é:
a) 1600 b) 1400 c) 1200 e) 900 d) 1100

19) (Colégio Naval-86) Antonio constrói 20 cadeiras em 3 dias de 4 horas de trabalho por dia. Severino constrói 15 cadeiras do mesmo tipo em 8 dias de 2 horas de trabalho por dia. Trabalhando juntos, no ritmo de 6 horas por dia, produzirão 250 cadeiras em:
(A) 15 dias (B) 16 dias (C) 18 dias (D) 20 dias (E) 24 dias

20) (Colégio Naval-94) Um tanque tem duas torneiras para enchê-lo. A primeira tem uma vazão de 6 litros por minuto e a segunda de 4 litros por minuto. Se metade do tanque é enchido pela **1ª torneira** num certo tempo $t_1$, e o restante pela segunda em um certo tempo $t_2$, qual deveria ser a vazão, em litros, por minuto de uma única torneira para encher completamente o tanque no tempo $t_1 + t_2$?
a) 4,5 b) 4,8 c) 5,0 d) 5,2 c) 5,8

21) (Colégio Naval-98) Uma cafeteira elétrica tem, no recipiente onde se coloca a água, um mostrador indicando de 1 a 20 cafezinhos. O tempo gasto para fazer 18 cafezinhos é de 10 minutos, dos quais 1 minuto é o tempo gasto para aquecer a resistência. Qual o tempo gasto por essa mesma cafeteira para fazer 5 cafezinhos?
(A) 3min (B) menos de 3min (C) entre 3min e 3,5min
(D) 3,5min (E) mais de 3,5min

22) (Colégio Naval-06) Uma máquina enche um depósito de cereais na razão de seis toneladas por hora. Num determinado dia, essa máquina com a tarefa de encher três depósitos de mesma capacidade encheu o primeiro normalmente, mas apresentou um defeito e encheu os outros dois na razão de três toneladas por hora. Em média, nesse dia quantas toneladas por hora trabalhou essa máquina?
a) 3,2 b) 3,5 c) 3,6 d) 4,0 e) 4,5

23) (Colégio Naval-07) Uma criação de 12 aves tipo A consome um saco de ração K em exatamente 30 dias e uma criação de 6 aves tipo B consome um saco de ração K, igual ao primeiro, em exatamente 10 dias. Inicialmente, tem-se um saco de ração K para cada um dos tipos de aves mencionados. No fim do quinto dia, a ração disponível para as aves de tipo B estragou-se, obrigando a distribuição de toda a ração restante para os dois tipos de aves. Assim sendo, quantos dias inteiros vai durar a ração restante para alimentar todos os animais na forma regular?
a) cinco b) seis c) sete d) oito e) nove

24) (EPCAr-16) Uma pessoa vai tomar um medicamento 3 vezes ao dia, durante 14 dias, em doses de 6 mL cada vez. Se cada frasco contém 200 $cm^3$ do medicamento, a quantidade do segundo frasco que NÃO será utilizada é
a) menor que 75% c) maior que 76%
b) exatamente 75% d) exatamente 76%

25) (EPCAr-06) Uma torneira com funcionamento normal e sem interrupção gasta 12 horas e 30 minutos para encher um tanque em forma de paralelepípedo, cuja base mede 45 dm por 500 cm e cuja altura mede x metros. Após jorrar 3.600 dal de água, que correspondem a 1/5 da capacidade do tanque, a torneira apresenta um defeito que reduz a sua vazão em 1/3. Considerando constante a vazão da torneira após o defeito, pode-se afirmar que o tempo gasto a mais para encher o tanque sem que a água entorne é
a) 12 horas e 30 minutos. b) 15 horas. c) 10 horas e 30 minutos.
d) 5 horas. e) nda

26) (EPCAr-08) Um grupo A de 6 pedreiros e 8 ajudantes executou 4/5 de uma obra em 12 dias, trabalhando 6 horas por dia. Por motivo de férias, o grupo A foi substituído por um grupo B de 8 pedreiros e 2 ajudantes que trabalhou 5 horas por dia para terminar a obra. Sabendo-se que a produção de 2 ajudantes equivale, sempre, à produção de 1 pedreiro e que não houve ausência de nenhum componente dos grupos de trabalho em nenhum dos dias, é correto afirmar que o grupo B
a) ao substituir o grupo A, acarretou um atraso de 1 dia no tempo em que a obra teria ficado pronta, caso a mesma tivesse sido concluída pelo grupo A
b) terminou a obra no tempo $t > 5$ dias.
c) gastaria mais de 21 dias se tivesse executado a obra inteira.
d) teria executado a parte feita pelo grupo A em menos de 15 dias.

27) (Colégio Naval-19) Um fazendeiro possui 'x' galinhas e ração estocada suficiente para 'n' dias. Sabe-se que cada galinha consome a mesma quantidade de ração diariamente. No final de 't' dias ($1 < t < n$) , o fazendeiro adquire outras 'k' galinhas, sendo que cada nova galinha consome o triplo da ração diária que uma das 'x' galinhas anteriores consome. Supondo que não houve renovação no estoque

de ração e que nenhuma ração foi usada para outro propósito, além de alimentar todas as galinhas conforme suas necessidades diárias, marque a opção cuja sentença permite obter a quantidade de dias 'y' que faltam para acabar o estoque atual de ração deste fazendeiro.

a) $(3k + x)\, y = x.(n - t)$ b) $(3k + x)\, y = x.(2n - t)$
c) $(2k + 3x)\, y = x.(3n - t)$ d) $(2k + x)\, y = x.(3n - t)$
e) $(3k + 3x)\, y = x.(2n - t)$

**28)** (Epcar-13) Uma empresa foi contratada para executar serviço de pintura no alojamento dos alunos do 1o ano CPCAR. O prazo estabelecido no contrato para a conclusão do serviço foi de 10 dias. O serviço começou a ser executado por uma equipe de 6 funcionários da empresa, cada um trabalhando 6 horas por dia. Ao final do 8o dia de serviço somente 3/5 do serviço de pintura havia sido executado. Para terminar o serviço dentro do prazo, a equipe de serviço recebeu mais 2 funcionários e todos passaram a trabalhar 9 horas por dia. Com isso a produtividade da equipe duplicou. A nova equipe, para concluir o trabalho, gastou mais de 1 dia, porém menos de 2 dias. Se h representa o número de horas que cada funcionário da nova equipe trabalhou no 10o dia de trabalho, então h é um número compreendido entre

a) 0 e 2 b) 2 e 4 c) 4 e 6 d) 6 e 8

**29)** (Epcar-20) Dois irmãos, Luiz e Guilherme, têm uma pequena fábrica de móveis de madeira. Luiz fabrica 20 cadeiras do modelo A em 3 dias de 4 horas de trabalho por dia. Já Guilherme fabrica 15 cadeiras do modelo A em 8 dias de 2 horas de trabalho por dia. Uma empresa fez uma encomenda à fábrica de 250 cadeiras do modelo A Para atender à demanda, os irmãos trabalharam juntos, no ritmo de 6 horas por dia, gastando então, y dias para concluir o trabalho e entregar a encomenda. O número y é tal que

a) possui raiz quadrada exata. b) divide 100
c) é divisor de 150 d) é múltiplo de 12

**30)** (Epcar-18) Uma prestadora de serviços combina um prazo de 9 dias, utilizando 12 máquinas, para executar certo trabalho. Ao final do quarto dia, 4 máquinas estragam, não sendo substituídas e não havendo interrupção do trabalho. As máquinas levam 3 dias para serem consertadas, retornando ao trabalho no dia seguinte. Para que seja cumprido o prazo combinado no início, a prestadora coloca, além das 12 máquinas, mais x máquinas iguais às primeiras. É correto afirmar que x é igual a

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

**31)** (Epcar-16) Duas máquinas A e B de modelos diferentes, mantendo cada qual sua velocidade de produção constante, produzem juntas n peças iguais, gastando simultaneamente 2 horas e 40 minutos. A máquina A funcionando sozinha,

mantendo sua velocidade constante, produziria, em 2 horas de funcionamento, n/2 dessas peças. É correto afirmar que a máquina B, mantendo sua velocidade de produção constante, produziria também n/2 dessas peças em

a) 40 minutos. c) 160 minutos.
b) 120 minutos. d) 240 minutos.

**32)** (ENEM-17) Às 17h 15min começa uma forte chuva, que cai com intensidade constante. Uma piscina em forma de um paralelepípedo retângulo, que se encontrava inicialmente vazia, começa a acumular a água da chuva e, às 18 horas, o nível da água em seu interior alcança 20 cm de altura. Nesse instante, é aberto o registro que libera o escoamento da água por um ralo localizado no fundo dessa piscina, cuja vazão é constante. As 18h 40min a chuva cessa e, nesse exato instante, o nível da água na piscina baixou para 15 cm.

O instante em que a água dessa piscina terminar de escoar completamente está compreendido entre

a) 19h 30min e 20h 10min.
b) 19h 20min e 19h 30min.
c) 19h 10min e 19h 20min.
d) 19h e 19h 10min.
e) 18h40 min e 19h.

**33)** (OBM-00) 1 litro de álcool custa R$ 0,75. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?

A) 54 B) 72 C) 50 D) 52 E) 45

**34)** (Olimpíada da Grande PoA-18) A torcida assistindo um certo jogo de futebol é composta de pais e filhos. Sabe-se que um sexto dessa torcida é composta de filhos e que dois quintos dos pais são homens. Pede-se determinar a fração da torcida correspondendo às mães.

**35)** (Olimpíada da Grande PoA-19) Ana fez dois copos de limonada. No primeiro, colocou 200 ml de suco de limão e 300 ml de água. No segundo copo, colocou 100 ml de suco de limão e 200 ml de água. Qual dos copos tem gosto mais forte de limão? Justifique sua resposta.

**36)** (OBM-10) Ana começou a descer uma escada no mesmo instante em que Beatriz começou a subi-la. Ana tinha descido 3/4 da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, que fração da escada Beatriz ainda terá que subir?

**Proporção**

1) (CM Brasília-16) Em um determinado instante, as baterias $B_1$ e $B_2$ de dois aparelhos celulares apresentam, respectivamente, 100% e 80% de carga total. Para descarregar por completo, $B_1$ leva t horas e $B_2$ leva três horas a mais que $B_1$. Considerando que as baterias descarregam linearmente ao longo do tempo e que, num certo instante, as duas baterias possuem o mesmo percentual de carga igual a 50%, o valor de t, em horas, é igual a

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 9

2) (ENEM-14) Um confeiteiro deseja fazer um bolo cuja receita indica a utilização de açúcar e farinha de trigo em quantidades fornecidas em gramas. Ele sabe que uma determinada xícara utilizada para medir os ingredientes comporta 120 gramas de farinha de trigo e que três dessas xícaras de açúcar correspondem, em gramas, a quatro de farinha de trigo.

Quantos gramas de açúcar cabem em uma dessas xícaras?

a) 30 b) 40 c) 90 d) 160 e) 360

3) (ENEM-13) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 $m^3$ de concreto.

Qual é o volume de cimento, em $m^3$, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75 b) 2,00 c) 2,33 d) 4,00 e) 8,00

4) (ENEM-19) Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

• Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;

• O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31000,00;

• O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso. Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

A) R$ 3 100,00 B) R$ 6 000,00 C) R$ 6 200,00

D) R$ 15 000,00 E) R$ 15 500,00

5) (CM Brasília-05) Sabendo-se que a, b, c são números inteiros positivos inversamente proporcionais a 3, 4 e 5, respectivamente, e que a + b = 70, calcule o valor de a − b + c .
A ( ) 42 B ( ) 40 C ( ) 38 D ( ) 36 E ( ) 34

6) (CM Fortaleza-06) Um pai resolve premiar seus três filhos com R$ 1900,00. Esse valor deve ser dividido em partes inversamente proporcionais ao número de faltas de cada um dos filhos na escola que foram 2, 4 e 5. Então, a quantia que caberá ao que recebeu menos é de:
( a )R$ 300,00 ( b )R$ 400,00 ( c )R$ 500,00
( d )R$ 600,00 ( e )R$ 700,00

7) (CM Brasília-05) Um conjunto P é formado por três elementos inteiros positivos diretamente proporcionais a 2, 3 e 7. Sabendo-se que o menor deles mais o triplo do maior, menos o dobro do outro é igual a 34. Qual é a soma desses três elementos?
A ( ) 24 B ( ) 36 C ( ) 50 D ( ) 62 E ( ) 76

8) (CM RJ-04) Um grupo de pessoas foi dividido em duas metades. Na primeira metade, a razão do número de homens para o de mulheres é de 1 para 2 e, na segunda metade, a razão do número de mulheres para o de homens é de 2 para 3. No grupo todo, a razão do número de mulheres para o de homens é de:
A) 19 para 11. B) 15 para 11. C) 8 para 7.
D) 16 para 15. E) 15 para 14.

9) (CM RJ-08) A receita bruta total de uma empresa é diretamente proporcional ao quadrado da terça parte das quantidades vendidas. Sabe-se que, quando são vendidas 6 unidades, a receita bruta total é igual 40. Assim, quando vender 3 unidades, a receita bruta total será igual a:
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

10) (CM RJ-09) Certo dia, para a execução de uma tarefa de reflorestamento, três auxiliares de serviços de campo foram incumbidos de plantar 378 mudas de árvores em uma reserva florestal. Dividiram a tarefa entre si, na razão inversa de suas respectivas idades: 24, 32 e 48 anos. Assim, o número de mudas que coube ao mais jovem deles foi
(A) 180 (B) 168 (C) 156 (D) 144 (E) 132

11) (CM Salvador-06) Um perfumista comprou 2000 litros de essência de eucalipto. A fim de obter uma nova fragrância, retirou x litros de essência de eucalipto e substituiu pela mesma quantidade de essência de andiroba. Em seguida, retirou a mesma quantidade x da mistura e substituiu pela mesma quantidade de

andiroba. Sabendo que a mistura final possui 1125 litros de essência de eucalipto pura, a quantidade x corresponde a:
(A) 500 litros (B) 650 litros (C) 720 litros
(D) 875 litros (E) 910 litros

**12)** (UESPI-06) Todos os integrantes de um grupo de turistas que certo dia visitou o Piauí receberam, como lembrança, uma única peça de artesanato a ser escolhida dentre aquelas esculpidas em cerâmica, madeira, ou metal. Após a distribuição das lembranças a proporção dos que escolheram as peças de cerâmica, madeira e metal foi de 2 : 5 : 9 respectivamente. Sabe-se que 1/9 dos turistas que escolheram as peças de metal são os únicos colecionadores de arte a fazerem parte do grupo. Nessas condições, é correto afirmar que a proporção dos turistas que são colecionadores de arte para o total de turistas do grupo é de:
a) 1 : 16 b) 1 : 15 c) 2 : 5 d) 3 : 7 e) 1 : 6

**13)** (CM Brasília-14) Um automóvel com motor Flex Fuel (motor que trabalha com álcool ou gasolina, ou qualquer mistura dos dois combustíveis), quando abastecido apenas com álcool, consome 10 litros desse combustível para percorrer a distância de 80 km. Quando abastecido com gasolina pura e álcool na razão de 3:1, ou seja, 3 litros de gasolina pura para 1 litro de álcool, consome 8 litros dessa mistura para percorrer a mesma distância. Mantidas essas relações e abastecendo o automóvel somente com gasolina pura, o consumo desse combustível para percorrer a mesma distância será igual a:
A ( ) 7 litros B ( ) 7,5 litros C ( ) 8 litros D ( ) 8,5 litros E ( ) 9 litros

**14)** (Epcar-14) O número de alunos do CPCAR que se inscreveu para um desafio de matemática na EPCAR, realizado anualmente, foi, nos anos de 2009, 2010 e 2012, respectivamente igual a 5, 6 e 20. Os professores da EPCAR perceberam que o número de alunos que se inscreveu para esse desafio cresceu, de maneira que a diferença entre o número de alunos dos anos $(x + 2)$ e $x$ é diretamente proporcional ao número de alunos do ano $(x + 1)$. Se $y$ é o número de alunos do CPCAR que se inscreveu nesse desafio em 2011, então a soma dos divisores naturais de $y$ é
a) 28 b) 26 c) 24 d) 20

**15)** (Colégio Naval-17) Adão, Beto e Caio uniram-se num mesmo investimento e combinaram que, em janeiro de cada ano, repartiriam o lucro obtido em partes diretamente proporcionais ao tempo de investimento e ao valor investido. Adão investiu R$ 10.000,00 há nove meses; Beto, R$ 15.000,00 há oito meses; e Caio, R$ 12.000,00 há cinco meses. Se o lucro a ser repartido é de R$ 54.000,00, o maior recebimento será de
a) R$ 10.000,00 b) R$ 12.000,00 c) R$ 15.000,00
d) R$ 18.000,00 e) R$ 24.000,00

16) (ENEM-13) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos.
Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?
a) 300 tijolos b) 360 tijolos c) 400 tijolos d) 480 tijolos e) 600 tijolos

17) (UFTM-11) Como combustível, o etanol de cana-de-açúcar e o etanol de milho têm qualidades iguais. O grande diferencial entre eles é a produtividade. Sabe-se que 1 hectare de cana-de-açúcar produz 7500 litros de etanol, enquanto 1 hectare de milho produz apenas 3000 litros. Uma região específica da usina tem x hectares plantados, divididos entre cana e milho, de forma diretamente proporcional à produtividade de cada cultura. Considerando que 1 ha = 10000 $m^2$ e que ao plantio do milho couberam 400 hectares, a área total, em $m^2$, dessa região específica pode ser corretamente expressa por
(A) $1,2 \times 10^6$. (B) $1,3 \times 10^6$. (C) $1,4 \times 10^7$.
(D) $1,4 \times 10^8$. (E) $1,6 \times 10^8$.

18) (Unesp-11) Os professores de matemática e educação física de uma escola organizaram um campeonato de damas entre os alunos. Pelas regras do campeonato, cada colocação admitia apenas um ocupante. Para premiar os três primeiros colocados, a direção da escola comprou 310 chocolates, que foram divididos entre os 1º, 2º e 3º colocados no campeonato, em quantidades inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 5, respectivamente. As quantidades de chocolates recebidas pelos alunos premiados, em ordem crescente de colocação no campeonato, foram:
A) 155, 93 e 62. B) 155, 95 e 60. C) 150, 100 e 60.
D) 150, 103 e 57. E) 150, 105 e 55.

19) (ENEM-10) Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta é de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.
Disponível em: http://www.embrapa.br. Acesso em: 29 abr. 2010 (adaptado).

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos.
Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?
a) 58 g e 456 g b) 200 g e 200 g c) 350 g e 100 g
d) 375 g e 500 g e) 400 g e 89 g

**20)** (Epcar-13) Uma mãe dividiu a quantia de R$ 2 100,00 entre seus três filhos de 3, 5 e 6 anos. A divisão foi feita em partes inversamente proporcionais às idades de cada um. Dessa forma, é verdade que
a) o filho mais novo recebeu 100 reais a mais que a soma dos valores recebidos pelos outros dois filhos.
b) o filho mais velho recebeu 20% a menos que o filho do meio.
c) a quantia que o filho do meio recebeu é 40% do que recebeu o mais novo.
d) se a divisão fosse feita em partes iguais, o filho mais velho teria sua parte acrescida de 40% em relação ao que realmente recebeu.

**21)** (Epcar-12) Um líquido $L_1$ de densidade 800 g/l será misturado a um líquido $L_2$ de densidade 900 g/l Tal mistura será homogênea e terá a proporção de 3 partes de $L_1$ para cada 5 partes de $L_2$ A densidade da mistura final, em g/l, será
a) 861,5 b) 862 c) 862,5 d) 863

**22)** (Colégio Naval-00) Se as grandezas A e B são representadas numericamente por números naturais positivos, tais que a relação matemática entre elas é $A.B^{-1} = 4$, coloque (V) verdadeiro ou (F) falso, assinalando a seguir, a alternativa que apresenta a seqüência correta.
( ) A é diretamente proporcional a B, por que se aumentando o valor de B, o de A também aumenta.
( ) A é inversamente proporcional a B, por que o produto de A pelo inverso de B é constate.
(...) A não é diretamente proporcional a B.
( ) A não é inversamente proporcional a B.
(A) (V) (F) (F) (V) (B) (F) (V) (V) (F)
(C) (F) (F) (V) (F) (D) (F) (F) (F) (V)
(E) (F) (F) (V) (V)

**23)** (Colégio Naval-04) No estudo de Ciências, item "Gases Perfeitos", tem-se a seguinte fórmula: $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$, onde $P_1$, $V_1$ e $T_1$ são, respectivamente, as condições de pressão, volume e temperatura de um gás perfeito num primeiro

estado; e $P_2$, $V_2$ e $T_2$ num segundo estado. Considerando a fórmula dada, analise as afirmativas abaixo.

I – Pressão e volume são diretamente proporcionais.

II – Pressão e temperatura são diretamente proporcionais.

III – Volume e temperatura são inversamente proporcionais.

Analise a alternativa correta.

a) As afirmativas I, II e III são falsas.

b) Apenas a afirmativa I é falsa.

c) Apenas a afirmativa II é falsa.

d) Apenas a afirmativa III é falsa.

e) Apenas a afirmativa I e III são falsas.

**24)** (Colégio Naval-05) Uma herança P foi dividida por dois herdeiros, com idades, respectivamente, iguais a n e m, em partes diretamente proporcionais ao quadrado de suas idades. Qual foi a parte da herança recebida pelo herdeiro de idade n?

a) $\frac{P^2n}{m^2+n^2}$ b) $\frac{Pn^2}{m^2+n^2}$ c) $\frac{P^2n^2}{m^2+n^2}$ d) $\frac{Pn^2m}{m^2+n^2}$ e) $\frac{P^2n^2m}{m^2+n^2}$

**25)** (Colégio Naval-06) As linhas da tabela abaixo mostram a variação de quatro grandezas: A, B , C e D. Observa-se, por exemplo, que quando a grandeza A vale 6 as grandezas B, C, e D valem, respectivamente, 18, 108 e 1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 3 | 6 | 9 |
| B | 3 | 9 | 18 | 27 |
| C | 3 | 27 | 108 | 243 |
| D | 3 | 2 | 1 | 1/3 |

Com base nos dados apresentados, analise as afirmativas abaixo.

I- A grandeza A é diretamente proporcional a B.

II – A grandeza A é diretamente proporcional a C.

III- A grandeza A é inversamente proporcional a D.

Assinale a opção correta.

a) apenas a afirmativa I é verdadeira.

b) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

c) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

d) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

e) as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

**26)** (Colégio Naval-08) Dois amigos compraram uma rifa por R$ 20,00, cujo prêmio é de R$ 1.000,00. Um deles deu R$ 15,00, e, o outro, R$ 5,00. Caso sejam contemplados, quantos reais a mais deverá receber o que deu a maior parte?

a) R$ 250 b) R$ 300 c) R$ 450 d) R$ 500 E) R$ 750

**27)** (Colégio Naval-17) Uma placa será confeccionada de modo que o emblema da empresa seja feito de um metal que custa R$ 5,00 o centímetro quadrado. O emblema consiste de três figuras planas semelhantes que lembram três árvores. Para as bases dessas "árvores", constroem-se segmentos de reta proporcionais a 3, 4 e 5. Se o custo da maior árvore do emblema ficou em R$ 800,00, qual o valor, em reais, de todo o emblema?

a) 1600 b) 1500 c) 1200 d) 1120 e) 1020

**28)** (IME-07) Sejam **a**, **b** e **c** números reais não nulos. Sabendo que $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

**29)** (Epcar-18) Até a primeira quinzena do mês de março de 2017, o combustível comercializado nos postos de nosso país era uma mistura de 1 parte de etanol para 3 partes de gasolina. Considere esse combustível e um outro que apresenta a mistura de 4 partes de etanol para 9 partes de gasolina. Juntando-se volumes iguais dos dois combustíveis, a nova relação de etanol para gasolina, nesta ordem, será

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{29}{75}$ d) $\frac{31}{75}$

**30)** (ENEM-15) Um paciente precisa ser submetido a um tratamento, sob orientação médica, com determinado medicamento. Há cinco possibilidades de medicação, variando a dosagem e o intervalo de ingestão do medicamento. As opções apresentadas são:

A: um comprimido de 400 mg, de 3 em 3 horas, durante 1 semana;
B: um comprimido de 400 mg, de 4 em 4 horas, durante 10 dias;
C: um comprimido de 400 mg, de 6 em 6 horas, durante 2 semanas;
D: um comprimido de 500 mg, de 8 em 8 horas, durante 10 dias;
E: um comprimido de 500 mg, de 12 em 12 horas, durante 2 semanas.

Para evitar efeitos colaterais e intoxicação, a recomendação é que a quantidade total de massa da medicação ingerida, em miligramas, seja a menor possível.

Seguindo a recomendação, deve ser escolhida a opção

a) A. b) B. c) C. d) D. e) E.

**31)** (OBM-99) Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar?

A) 132 B) 144 C) 146 D) 148 E) 152

**32)** (Olimpíada de Minas Gerais-04) Uma mistura do tipo I contém suco de limão, óleo e vinagre na proporção 1:2:3. Numa segunda mistura, do tipo II, a proporção é 3:4:5. Qual é a proporção de suco de limão, óleo e vinagre numa mistura composta de um litro da mistura do tipo I mais um da mistura do tipo II?

**33)** (OBM-07) Sejam $a,b,c$ e $k$ números reais diferentes de zero satisfazendo as relações $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Qual é o número de possíveis valores que $k$ pode assumir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**34)** (OBM-07) Em uma certa cidade, a razão entre o número de homens e mulheres é 2 : 3 e entre o número de mulheres e crianças é 8 : 1. A razão entre o número de adultos e crianças é:

A) 5 : 1 B) 16 : 1 C) 12 : 1 D) 40 : 3 E) 13 : 1

**35)** (Olimpíada do Rio de Janeiro-02) Seu Manoel é dono de uma adega e vende determinadas misturas de vinho. Ele dispõe em seu estoque de um vaso onde há 12 litros de vinho e 18 litros de água e de outro onde há 9 litros de vinho e 3 litros de água. Um cliente fez um pedido especial e Seu Manoel se viu com o seguinte dilema: Quantos litros deveria tirar, de cada vaso, para obter uma mistura com 14 litros que contenham partes iguais de água e vinho?

**36)** (Olimpíada do Espírito Santo-04) Um saco de balas foi distribuído entre André, Bruno e Carlos na proporção 5:4:3. Eles notaram que se a mesma quantidade de balas fosse distribuída na proporção 7:6:5, um deles receberia 40 balas a mais. Determine o número de balas que cada um recebeu.

**37)** (Olimpíada de Goiás-13) Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água. Com esta diluição, a quantidade de suco concentrado que eles têm permite servir exatamente 400 ml de suco para cada convidado.

(a) Nestas condições, cada litro de suco concentrado é suficiente para preparar suco para quantas pessoas?

(b) Na última hora avisaram que virão à festa cinco pessoas a mais que o previsto. O líder da equipe pensou rapidamente e concluiu que basta mudarem a diluição do suco para cinco partes de água para cada parte de suco concentrado, e novamente terão o equivalente a 400 ml por pessoa. Diante destas informações, qual era o número de convidados previsto originalmente?

**Regra de três**

**1)** (ENEM-09) Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R$ 10.00 por trabalhador por dia de trabalho, e R$ 1.000,00 pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R$ 25.000,00.
Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria
a) manter sua proposta.
b) oferecer 4 máquinas a mais.
c) oferecer 6 trabalhadores a mais.
d) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.
e) reduzir em R$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

**2)** (ENEM-15) Uma confecção possuía 36 funcionários, alcançando uma produtividade de 5 400 camisetas por dia, com uma jornada de trabalho diária dos funcionários de 6 horas. Entretanto, com o lançamento da nova coleção e de uma nova campanha de marketing, o número de encomendas cresceu de forma acentuada, aumentando a demanda diária para 21 600 camisetas. Buscando atender essa nova demanda, a empresa aumentou o quadro de funcionários para 96. Ainda assim, a carga horária de trabalho necessita ser ajustada.
Qual deve ser a nova jornada de trabalho diária dos funcionários para que a empresa consiga atender a demanda?
a) 1 hora e 30 minutos. b) 2 horas e 15 minutos. c) 9 horas.
d) 16 horas. e) 24 horas.

**3)** (Fuvest-10) Um automóvel, modelo flex, consome 34 litros de gasolina para percorrer 374km. Quando se opta pelo uso do álcool, o automóvel consome 37 litros deste combustível para percorrer 259km. Suponha que um litro de gasolina custe R$2.20. Qual deve ser o preço do litro do álcool para que o custo do quilômetro rodado por esse automóvel, usando somente gasolina ou somente álcool como combustível, seja o mesmo?
a) R$1,00 b) R$1,10 c) R$1,20 d) R$1,30 e) R$1,40

**4)** (Unimontes-10) Numa fazenda, um grupo de 15 trabalhadores colheu 360 sacas de café em 6 horas. No dia seguinte, mais 6 trabalhadores juntaram-se ao grupo e terminaram a colheita, totalizando 420 sacas no dia. Quanto tempo a menos eles trabalharam em relação ao dia anterior?
A) 1h20min. B) 5h. C) 2h. D) 1h.

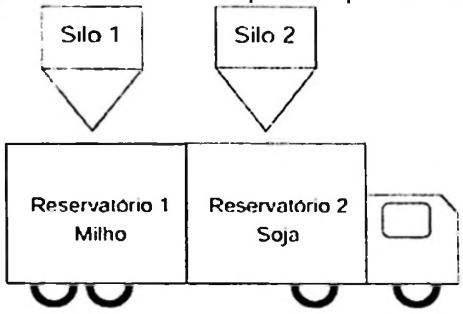
5) (CM Brasília-14) Um estudo recente apresentado por pesquisadores nos Estados Unidos sugere que a eletricidade gerada, a partir de estrume de vacas, pode ser economicamente viável. O processo de produção de energia se dá de maneira simples. O esterco é depositado em um digestor anaeróbico e lá permanece por alguns dias submetido a altas temperaturas. As bactérias ali contidas convertem os resíduos em gás metano, que sobe pela tubulação e alimenta um motor de gás natural modificado, que por sua vez produz eletricidade.

Tendo em vista que 30 Kg de esterco de vaca geram eletricidade suficiente para alimentar duas lâmpadas de 100W por 24 horas, a quantidade de esterco de vaca necessária para gerar eletricidade suficiente para alimentar 12 lâmpadas de 100W por 4 horas é igual a:

A ( ) 30 Kg B ( ) 300 Kg C ( ) 833 Kg
D ( ) 1080 Kg E ( ) 1800 Kg

6) (ENEM-09) Um pequeno caminhão dispõe de dois reservatórios vazios, cada um com capacidade de 2 000 kg, os quais serão utilizados para transportar a produção de milho e soja até um centro consumidor. No centro de abastecimento abre-se o registro de um primeiro silo às 12 horas para alimentar o reservatório 1 com milho, numa taxa de 120 kg por minuto.

Passados cinco minutos, abre-se o registro de um segundo silo para alimentar o reservatório 2 com soja, numa taxa de 80 kg por minuto. Considere que a encomenda de milho no centro consumidor seja de 1 800 kg e que, pela lei rodoviária local, a carga máxima a ser transportada por caminhão seja de 3 400 kg.




Nestas condições, em que instantes devem ser fechados os registros dos silos 1 e 2, respectivamente, para que a quantidade de soja transportada seja a máxima possível?

a) 12h15min e 12h20min
b) 12h15min e 12h25min
c) 12h15min e 12h27min30seg
d) 12h15min e 12h30min
e) 12h15min e 12h32min30seg

7) (CM Brasília-04) Numa fábrica, 10 máquinas trabalhando 20 dias produzem 2000 peças. Quantas máquinas serão necessárias para produzir 1680 peças em 6 dias?

A ( ) 18 máquinas B ( ) 28 máquinas C ( ) 38 máquinas
D ( ) 8 máquinas E ( ) 26 máquinas

8) (CM Brasília-05) Antônio constrói 20 cadeiras em 3 dias, trabalhando 4 horas por dia. Severino constrói 15 cadeiras do mesmo tipo em 8 dias, trabalhando 2 horas por dia. Trabalhando juntos, no ritmo de 6 horas por dia, em quantos dias se produzirão 250 cadeiras?

A ( ) 24 B ( ) 20 C ( ) 16 D ( ) 12 E ( ) 8

9) (CM Brasília-07) Se m homens fazem um trabalho em d dias, então m + r homens farão o trabalho em

A ( ) d + r dias. B ( ) d – r dias. C ( ) $\frac{md}{m+r}$ dias.

D ( ) $\frac{d}{m+r}$ dias. E ( ) r dias.

10) (CM Brasília-08) Uma montadora recebeu uma encomenda de 40 carros. A montadora trabalhou durante 5 dias; utilizando 6 robôs, de mesmo rendimento, que trabalham 8 horas por dia para atender esta encomenda. Uma outra encomenda foi feita, para montar 60 carros. Mas um dos robôs apresentou um defeito e não pôde ser usado no trabalho. Para atender o cliente a montadora precisou trabalhar 12 horas por dia. o número de dias que a fábrica trabalhou para entregar os dois pedidos foi:

A ( ) 5 B ( ) 6 C ( ) 11 D ( ) 12 E ( ) 13

11) (CM Brasília-08) Trabalhando 6 horas por dia, 8 diagramadores paginaram 3/8 de um livro em 5 dias. Para terminar a paginação desse livro, trabalhando com 3 diagramadores a menos, reduzindo-se o tempo de trabalho diário em 1 hora e mantidas as proporções, serão necessários mais

a) 8 dias b) 12 dias c) 16 dias d) 20 dias e) 25 dias

12) (CM Brasília-09) A energia eólica é obtida pelo movimento do ar (vento) e é hoje considerada uma das mais promissoras fontes naturais de energia, principalmente porque é renovável, ou seja, não se esgota. Além disso, as turbinas eólicas podem ser utilizadas tanto em conexão com redes elétricas como em lugares isolados. Na cidade de Osório, RS, temos o parque eólico de Osório. Ele é composto por 75 torres de aerogeradores. O prefeito de uma cidade vizinha encomendou 50 torres de aerogeradores. A fábrica montou as torres em 50 dias utilizando 18 robôs de mesmo rendimento, que trabalhavam 8 horas por dia. Uma

nova encomenda foi feita pelo mesmo cliente, desta vez 60 torres. Nessa ocasião, três robôs não participaram da montagem. Para atender o cliente, a fábrica trabalhou 12 horas por dia. De acordo com os dados do texto, determine o número de dias necessários para que a fábrica entregue as duas encomendas.

A ( ) exatamente 100 B ( ) mais de 100 C ( ) entre 90 e 100
D ( ) menos de 90 E ( ) Exatamente 90

13) (CM Manaus-10) Vinte e cinco tecelões, trabalhando 7 horas por dia, durante 18 dias, fizeram 750 metros de certo tecido. Quantos tecelões trabalhando 9 horas por dia, durante 14 dias, seriam necessários para fazer 630 metros do mesmo tecido?

a) 20 tecelões b) 21 tecelões c) 22 tecelões d) 23 tecelões e) 24 tecelões

14) (CM RJ-05) Um certo trabalho é feito por 16 tratores iguais em 10 dias, cada um deles trabalhando 10 horas por dia. Após dois dias de trabalho, 6 tratores apresentaram defeitos, não podendo mais serem utilizados. Quantas horas por dia deverão trabalhar os demais tratores, prevendo que ocorrerá um atraso de 8 dias para o término do trabalho?

A) 6 h. B) 8 h. C) 10 h. D) 12 h. E) 15 h.

15) (CM RJ-06) Em 30 dias, 24 operários asfaltam uma avenida de 960 metros de comprimento por 9 metros de largura. Nas mesmas condições de trabalho, quantos operários seriam necessários para fazer o asfaltamento, em 20 dias, de uma avenida de 600 metros de comprimento e 10 metros de largura?

A) 25 B) 28 C) 31 D) 34 E) 37

16) (CM RJ-09) Um sistema de máquinas demora 37 segundos para produzir uma peça. O tempo necessário para produzir 250 peças é:

(A) 1h 53min e 30s (B) 2h 43min e 20s (C) 2h 34min e 10s
(D) 1h 37min e 37s (E) 2h 55min e 40s

17) (CM Salvador-06) Dois homens trabalhando 10 horas por dia pintaram uma mansão em exatas 48 horas. Em quantas horas, 4 homens, com a mesma capacidade e condições de trabalho, trabalhando durante 6 horas por dia, pintam a mesma mansão?

(A) 24 horas (B) 30 horas (C) 36 horas (D) 38 horas (E) 40 horas

18) (CM Santa Maria-05) Um aluno resolve 6 problemas de matemática em meia hora, enquanto come 3 biscoitos e bebe uma xícara de café. Se considerarmos que o biscoito diminui a eficiência, e o café a estimula, quantos exercícios resolveria comendo 8 biscoitos e bebendo 4 xícaras de café em 2 horas?

a. ( ) 9 b. ( ) 36 c. ( ) 24 . d. ( ) 256 e. ( ) 318

**19)** (CM Santa Maria-05) Sabe-se que byte é a unidade de medida usada para a memória do computador e para o armazenamento de dados. Quando um programa é instalado em um computador ele fica armazenado no disco rígido. Sabendo-se que 1 kbyte é igual a 1024 bytes, o número de bytes de um computador que tem 64 kbytes é:

a. ( ) 65256 b. ( ) 65536 c. ( ) 59869
d. ( ) 49789 e. ( ) 50004

**20)** (Epcar-11) Para a reforma do Ginásio de Esportes da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (2ª feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10º dia, 4 operários foram dispensados. No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folga em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é

a) domingo. c) terça-feira.
b) segunda-feira. d) quarta-feira.

**21)** (Colégio Naval-16) Para capinar um terreno circular plano, de raio 7 m, uma máquina gasta 5 horas. Quantas horas gastará essa máquina para capinar um terreno em iguais condições com 14 m de raio?

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

**22)** (Epcar-12) A quantidade de suco existente na cantina de uma escola é suficiente para atender o consumo de 30 crianças durante 30 dias. Sabe-se que cada criança consome, por dia, a mesma quantidade de suco que qualquer outra criança desta escola. Passados 18 dias, 6 crianças tiveram que se ausentar desta escola por motivo de saúde. É correto afirmar que, se não houver mais ausências nem retornos, a quantidade de suco restante atenderá o grupo remanescente por um período de tempo que somado aos 18 dias já passados, ultrapassa os 30 dias inicialmente previstos em

a) 10% b) 20% c) 5% d) 15%

**23)** (Epcar-17) Certa máquina, funcionando normalmente 5 horas por dia, gasta 3 dias para produzir 1200 embalagens. Atualmente está com esse tempo de funcionamento diário reduzido em 20%, trabalhando, assim, apenas T horas por dia. Para atender uma encomenda de 1840 embalagens, aproveitando ao máximo em todos os dias o seu tempo T de funcionamento, ela gastará no último dia

a) 120 minutos b) 150 minutos c) 180 minutos d) 200 minutos

24) (Colegio Naval-80) Com uma produção diária constante, uma máquina produz 200 peças em D dias. Se a produção diária fosse de mais 15 peças, levaria menos 12 dias para produzir as 200 peças. O número D é um número:

(A) múltiplo de 6 (B) primo (C) menor que 17
(D) maior que 24 (E) entre 17 e 24

25) (Colégio Naval-81) Em um problema de regra de três composta, entre as variáveis X, Y e Z, sabe-se que, quando o valor de Y aumenta, o de x também aumenta; mas, quando z aumenta, o valor de x diminui , e que para $X = 1$ e $Y = 2$, o valor de $Z = 4$. O valor de X, para $Y = 18$ e $Z = 3$ é :

(A) 6,75 (B) 0,333... (C) 15 (D) 12 (E) 18

26) (EPCAr-00) Se 16 homens gastam 10 dias montando 32 máquinas, o número de dias que 20 homens necessitarão para montar 60 máquinas é

a) par. b) impar. c) primo. d) não inteiro.

27) (EPCAr-05) Se x homens, trabalhando x horas por dia durante x dias, produzem x artigos, então, o número de dias necessário para que y homens, trabalhando y horas por dia produzam um número y de artigos é

a) $\frac{y^2}{x}$ b) $\frac{x^2}{y}$ c) $\frac{y^3}{x^2}$ d) $\frac{x^2}{y^3}$

28) (EPCAr-06) Um tear eletrônico, trabalhando 5 horas por dia, produz 1200 peças em 3 dias. O número de horas que deverá trabalhar no 8º dia para produzir 1840 peças, se o regime de trabalho fosse 3 horas diárias, seria um número do intervalo

a) [2, 3[ b) [3, 4[ c) [4, 6[ d) [1, 2[

29) (EPCAr-07) Trinta operários trabalhando 8 horas por dia, constroem 36 casas em 6 meses. O número de dias que deverão ser trabalhados no último mês para que 2/3 dos operários, trabalhando 2 horas a mais por dia, construam 0,75 das casas, considerando um mês igual a 30 dias, é

a) 10 b) 12 c) 15 d) 16

30) (OBM-98) Para fazer 12 bolinhos, preciso exatamente de 100g de açúcar, 50g de manteiga, meio litro de leite e 400g de farinha. A maior quantidade desses bolinhos que serei capaz de fazer com 500g de açúcar, 300g de manteiga, 4 litros de leite e 5 quilogramas de farinha é:

A) 48 B) 60 C) 72 D) 54 E) 42

**31)** (OBM-98) Se $x$ homens fazem $x$ embrulhos em $x$ segundos, em quantos segundos $y$ homens farão $y$ embrulhos?

A) $y$ B) $x$ C) $\frac{x^2}{y}$ D) $\frac{y^2}{x}$ E) $\frac{y}{x}$

**32)** (OBM-98) Você entra em um restaurante para comer pizza e espera pagar uma quantia proporcional à quantidade de comida pedida. Se uma pizza com 20 cm de diâmetro custa R$ 3,60, quanto você espera pagar por uma outra do mesmo sabor com 30cm de diâmetro?

A) R$ 5,40 B) R$ 5,80 C) R$ 6,60 D) R$ 7,50 E) R$ 8,10

**33)** (OBM-01) Em Tumbólia, um quilograma de moedas de 50 centavos equivale em dinheiro a dois quilogramas de moedas de 20 centavos. Sendo 8 gramas o peso de uma moeda de 20 centavos, uma moeda de 50 centavos pesará:

A) 15 gramas B) 10 gramas C) 12 gramas D) 20 gramas E) 22 gramas

**34)** (OBM-05) Um galão de mel fornece energia suficiente para uma abelha voar 7 milhões de quilômetros. Quantas abelhas iguais a ela conseguiriam voar mil quilômetros se houvesse 10 galões de mel para serem compartilhados entre elas?

A) 7000 B) 70000 C) 700000
D) 7000000 E) 70000000

**35)** (Olimpíada de Campina Grande-10) Em 10 minutos um pedreiro consegue assentar 10 tijolos em uma certa parede. Sabendo que a base da parede tem 30 tijolos, em duas horas e meia quantas fileiras de 30 tijolos ele assentou?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

**36)** (OBM-06) Em um tanque há 4000 bolinhas de pingue-pongue. Um menino começou a retirar as bolinhas, uma por uma, com velocidade constante, quando eram 10h. Após 6 horas, havia no tanque 3520 bolinhas. Se o menino continuasse no mesmo ritmo, quando o tanque ficaria com 2000 bolinhas?

A) às 11h do dia seguinte B) às 23h do mesmo dia
C) às 4h do dia seguinte D) às 7h do dia seguinte
E) às 9h do dia seguinte

**37)** (Olimpíada do Ceará-84) Três máquinas P, Q e R, trabalhando juntas, podem fazer um trabalho T em x horas. Quando trabalhando sozinha, P necessita de um adicional de 6 horas para realizar o mesmo trabalho, Q um adicional de 1 hora e R x horas adicionais. Determine o valor de x.

**Porcentagem**

1) (ESSA-12) Comprei um eletrodoméstico e ganhei do vendedor 5% de desconto sobre o preço da mercadoria. Após falar com o gerente da loja, ele deu um desconto de 10% sobre o novo valor que eu pagaria. Paguei, então, R$ 1.710,00. Qual era o preço inicial da mercadoria?
A) R$ 1.900,00 B) R$ 1.950,00 C) R$ 2.000,00
D) R$ 2.100,00 E) R$ 2.200,00

2) (CM Brasília-05) Um certo líquido aumenta o seu volume em 15% ao ser congelado. No máximo, quantos mililitros desse líquido devem ser colocados em um recipiente com capacidade máxima para 230 mililitros, sabendo-se que o recipiente não sofre qualquer alteração da sua capacidade nesse processo?
A) 195,5 B) 200 C) 205 D) 210 E) 215

3) (CM Brasília-05) Um clube está fazendo uma campanha, entre seus associados, para arrecadar fundos destinados a uma nova pintura na sede social. Contatados 60% dos associados, verificou-se que se havia atingido 75% da quantia necessária para a pintura, e que a contribuição média correspondia a R$ 60,00 (sessenta reais) por associado contatado. Então, para completar exatamente a quantia necessária para a pintura, a contribuição média por associados, entre os restantes ainda não contatados, deve ser igual a
A ( ) R$ 25,00. B ( ) R$ 30,00. C ( ) R$ 40,00.
D ( ) R$ 50,00. E ( ) R$ 60,00.

4) (CM Brasília-07) Os médicos utilizam o IMC (Índice de Massa Corporal) para determinar se uma pessoa está com peso saudável ou se está obesa. Geralmente, consideram que a faixa de peso saudável está entre um IMC de 20 a 25. Para calcular o IMC, utiliza-se a fórmula $imc = \frac{peso}{(altura)\times(altura)}$. Dois alunos da 1ª Série do Ensino Médio, do Colégio Militar de Brasília, têm o mesmo IMC. Se eles têm pesos $p_1$ e $p_2$, tais que $p_1 + p_2 = 110{,}5$ Kg e o primeiro tem estatura 10% maior que a do segundo, podemos afirmar, então, que a diferença entre $p_2$ e $p_1$, em Kg, é
A) maior que 15 e menor que 17. B) maior que 13 e menor que 15.
C) maior que 10 e menor que 13. D) maior que 8 e menor que 10.
E) menor que 8.

5) (CM Brasília-08) No Colégio Militar de Brasília, uma professora concedeu um tempo T para a realização da prova de Português (gramática, interpretação de texto e redação). um certo aluno gastou 1/3 deste tempo para resolver a parte de gramática, 25% do tempo para resolver a interpretação dos textos e apenas 2/3 do

tempo de que ainda dispunha para fazer a redação. ele entregou a prova faltando 25 minutos para seu término. O tempo T, concedido pela professora, foi de:

A ( ) 2 horas e 30 minutos B ( ) 3 horas
C ( ) 3 horas e 10 minutos D ( ) 3 horas e 30 minutos
E ( ) 4 horas

**6)** (CM Brasília-08) O gerente de uma loja observou que o estoque de um determinado modelo de telefone celular havia encalhado em seu depósito. Então propôs fazer uma liquidação desses aparelhos com um desconto de 20% sobre o preço anunciado. Mas, para não ter prejuízo, agiu com esperteza e aumentou o preço do celular antes de anunciá-lo, para que após o desconto ficasse com o mesmo preço inicial de R$468,00. Qual o preço do celular anunciado.

A) R$561,60 B) R$585,00 C) R$590,00 D) R$600,00 E) R$650,00

**7)** (CM Fortaleza-06) Um estacionamento cobrava R$ 5,00 por três horas de utilização e agora passou a cobrar R$ 5,00 por duas horas. O percentual de aumento do preço, cobrado pelo estacionamento, em relação ao preço inicial, foi de:

( a )33% ( b )45% ( c )50% ( d )60% ( e )67%

**8)** (CM Manaus-10) Seu Jorge submeteu-se a uma dieta por recomendação médica, pois está extremamente gordo. Nos três primeiros meses, conseguiu perder 30% de seu peso. Porém, nos três meses seguintes, relaxou na alimentação e voltou a engordar 30%. Durante esse semestre, o peso de Seu Jorge:

A) Reduziu em 10 % B) Reduziu em 9% C) Aumentou em 91%
D) Aumentou em 9% E) Manteve seu peso inicial

**9)** (CM RJ-03) Durante este ano de 2003, o preço da gasolina sofreu os seguintes reajustes (sucessivos e nesta ordem):

aumento de 10 % aumento de 8 % redução de 5 %

Em relação a seu preço inicial neste ano, podemos afirmar que:

A) houve aumento de 13 %. B) houve aumento de 12,86 %.
C) houve aumento de 10,5 %. D) houve aumento de 7 %.
E) houve aumento de 5,8 %.

**10)** (CM RJ-05) Uma senhora, julgando-se extremamente gorda, resolveu fazer uma dieta, com acompanhamento médico, e perdeu, nos três primeiros meses, 30 % do seu peso; entretanto, nos três meses seguintes, ela aumentou seu peso em 40 %, em relação ao final do primeiro trimestre. No decorrer desse semestre, o peso dessa senhora, relativamente ao início do tratamento:

A) diminuiu 2 %. B) diminuiu 10 %. C) manteve seu valor.
D) aumentou 10 %. E) aumentou 16 %.

**11)** (CM RJ-06) Os produtores de um show de rock resolveram dar desconto de 25 % no preço do ingresso. Estimou-se, com isso, que o público aumentaria em 60 %. Caso se confirmassem as estimativas dos produtores, podemos afirmar que o total arrecadado nas bilheterias:

A) aumentaria 35 % B) aumentaria 20 % C) aumentaria 10 %
D) aumentaria 5 % E) diminuiria 10 %

**12)** (CM Salvador-07) Um vendedor de automóveis tem duas propostas de trabalho. Na primeira ele ganharia 5% do total de suas vendas; na segunda, ele ganharia R$ 1.000,00 mais 3% do total de suas vendas. A partir de que valor de vendas a primeira proposta é mais vantajosa que a segunda?

(A) R$ 20.000,00 (B) R$ 30.000,00 (C) R$ 40.000,00
(D) R$ 50.000,00 (E) R$ 60.000,00

**13)** (CM Santa Maria-05) "Gasolina aumenta mais de 7% em Santa Maria"

Segundo cálculos de especialistas, o impacto nas bombas deveria ser de até 7%, ou R$ 0,15 por litro, no caso da gasolina, e cerca de 10%, ou R$ 0,16, no diesel. Mas, a pesquisa realizada pelo jornal A Razão em 12 postos de Santa Maria revelou que o aumento, no caso da gasolina, ficou um pouco acima desse cálculo. O aumento variou de 6,17% a 9,41%. O litro do combustível está custando, em média, R$ 0,19 a mais do que há um mês e pode ser encontrado de R$ 2,70 a R$ 2,80.

(baseado na reportagem do jornal A Razão de 12 Out 05)

O posto Brasil reajustou o preço da gasolina de R$ 2,55 para R$ 2,79, efetuando um aumento de aproximadamente _____%, enquanto o posto Classe A reajustou o seu preço de R$ 2,57 para R$ _____, efetuando um aumento de 7%.

A alternativa que completa corretamente os espaços em branco é:

a) 9,41 e 2,75 b) 7,68 e 2,58 c) 6,17 e 2,80 d) 8,94 e 2,79 e) 6,17 e 2,74

**14)** (ENEM-14) Uma concessionária de automóveis revende atualmente três marcas de veículos, A, B e C, que são responsáveis por 50%, 30% e 20%, respectivamente, de sua arrecadação. Atualmente, o faturamento médio mensal dessa empresa é de R$ 150 000,00. A direção dessa empresa estima que, após uma campanha publicitária a ser realizada, ocorrerá uma elevação de 20%, 30% e 10% na arrecadação com as marcas A, B e C, respectivamente.

Se os resultados estimados na arrecadação forem alcançados, o faturamento médio mensal da empresa passará a ser de

a) R$ 180 000,00. b) R$ 181 500,00. c) R$ 187 500,00.
d) R$ 240 000,00. e) R$ 257 400,00.

**15)** (Epcar-15) Uma pessoa possui a quantia de x reais e pretende comprar um sítio. O valor x corresponde a 30% do valor do sítio. Se essa pessoa vender o apartamento em que atualmente reside e juntar ao valor x, ela conseguirá pagar o

sítio e, ainda, lhe sobrarão R$15.000,00. Até que seja efetuada a venda do apartamento que reside, essa pessoa conseguiu com um amigo um empréstimo, sem juros, de R$60.000,00. Assim, juntou os x reais com os R$60.000,00 e efetuou parte do pagamento, ficando devendo 2/5 do valor total do sítio. Com base nessas informações, marque a alternativa **FALSA**.

a) O valor do sítio é maior que R$180.000,00.

b) Com a quantia x pode-se comprar um carro cujo valor é R$55.000,00 e ainda sobra dinheiro.

c) A quantia de x reais mais os R$60.000,00 de empréstimo somam menos de R$130.000,00.

d) O valor do apartamento onde a pessoa reside corresponde a 3/4 do valor do sítio.

16) (Epcar-20) Uma pessoa aplicou 60000 reais durante o ano de 2018. Parte desse dinheiro aplicou no investimento P e a outra parte, no investimento Q No final de 2018, retirou o dinheiro das duas aplicações e verificou que, somando os dois valores, não obteve lucro nem prejuízo. O investimento P rendeu 10%, mas, sobre o rendimento, foi cobrada uma taxa de 10%; já o investimento Q deu prejuízo de 12,6% Com base nessas informações, pode-se afirmar que

a) a razão entre o valor aplicado em Q e o valor aplicado em P é 5/8.

b) com o que essa pessoa recebeu do investimento Q, no final de 2018, seria possível comprar um carro de 23000 reais.

c) a diferença entre o maior e o menor valor aplicados, em reais, é maior que 11000 reais.

d) essa pessoa aplicou mais de 32000 reais no investimento P

17) (Epcar-18) Uma revendedora de automóveis usados apresenta um modelo e o anuncia por x reais. Para atrair clientes, a revendedora oferece duas formas de pagamento:

| Forma de pagamento | Valor |
|---|---|
| À vista | 10% de desconto sobre o preço anunciado |
| Cartão de crédito | Com acréscimo de 20% sobre o preço anunciado, sendo o total dividido em 10 parcelas iguais |

Um cliente comprou um automóvel e optou pelo pagamento no cartão de crédito em 10 parcelas iguais de R$ 3240,00 Considerando as informações anteriores, é correto afirmar que

a) o valor x anunciado pela revendedora é menor que R$ 25000,00.

b) se esse cliente tivesse optado pelo pagamento à vista, então ele gastaria mais de R$ 24 500,00 com essa compra.

c) a opção que esse comprador fez usando o cartão de crédito representou um acréscimo de 30% sobre o valor que seria pago à vista.

d) se o cliente tivesse pago à vista, ao invés de utilizar o cartão de crédito, então teria economizado mais de R$ 8 000,00.

18) (ENEM-16) Segundo o Compromisso Empresarial para Reciclagem (Cempre), o volume de lixo urbano reciclado passou de 5 milhões de toneladas, em 2003, para 7,1 milhões de toneladas, em 2008. Nesse mesmo período, o número de municípios com coleta seletiva passou de 653 para 1004. Esperava-se, durante este período, um aumento de pelo menos 40% no volume de lixo urbano reciclado e de 60% no número de municípios com coleta seletiva.

Disponível em: http://revistaepoca. globo.com. Acesso em: 31 de jul. 2012.

Considerando os valores apresentados para o período de 2003 a 2008, os aumentos esperados no volume de lixo urbano reciclado e no número de municípios com coleta seletiva.

a) não foram atingidos, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 30%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 30%.

b) não foram atingidos, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 30%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 35%.

c) foram atingidos apenas parcialmente, pois os aumentos no volume de lixo urbano reciclado e no número de municípios com coleta seletiva foram de 42%.

l) foram atingidos apenas parcialmente, pois o aumento no volume de lixo urbano eciclado foi de 42%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 35%.

:) foram atingidos apenas parcialmente, pois o aumento no volume de lixo urbano eciclado foi de 42%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 54%.

19) (Unesp-08) Foi realizada uma eleição entre os candidatos João e José. Deu-se início à apuração e, num determinado momento, quando já havia sido apurada a quantidade x dos votos, em porcentagem, o resultado parcial era de 80% dos votos para José e 20% dos votos para João. O valor máximo que x pode assumir de forma que José ainda não tenha assegurada a sua vitória é

A)80%. B) 62,5%. C) 52,5%. D) 40%. E) 36%.

20) (Epcar-16) O dono de uma loja de produtos seminovos adquiriu, parceladamente, dois eletrodomésticos. Após pagar 2/5 do valor dessa compra, quando ainda devia R$ 600,00, resolveu revendê-los. Com a venda de um dos eletrodomésticos, ele conseguiu um lucro de 20% sobre o custo, mas a venda do outro eletrodoméstico representou um prejuízo de 10% sobre o custo. Com o valor total apurado na revenda, ele pôde liquidar seu débito existente e ainda lhe sobrou a quantia de R$ 525,00. A razão entre o preço de custo do eletrodoméstico mais caro e o preço de custo do eletrodoméstico mais barato, nessa ordem, é equivalente a

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2

**21)** (Epcar-14) Leila foi avisada em dezembro de 2012, que a mensalidade escolar de seus filhos para o ano de 2013 teria um aumento de 80%. Ela não concordou com o aumento e procurou o PROCON que, após analisar o caso, determinou que a escola reduzisse este último valor em 30%. A escola acatou a decisão do PROCON. Além disso, como Leila tem 3 filhos matriculados, a escola decidiu lhe dar 10% de desconto nas mensalidades de cada um de seus filhos. Dessa forma, o aumento da mensalidade escolar dos filhos da Leila do ano de 2012 para o ano de 2013 passou a ser, em percentual, um número compreendido entre

a) 10 e 13 b) 13 e 16 c) 16 e 19 d) 19 e 22

**22)** (Epcar-17) No concurso CPCAR foi concedido um tempo T para a realização de todas as provas: Língua Portuguesa, Matemática e Língua Inglesa; inclusive marcação do cartão resposta. Um candidato gastou 1/3 deste tempo T com as questões de Língua Portuguesa e 25% do tempo restante com a parte de Língua Inglesa. A partir daí resolveu as questões de Matemática empregando 80% do tempo que ainda lhe restava. Imediatamente a seguir, ele gastou 5 minutos preenchendo o cartão-resposta e entregou a prova faltando 22 minutos para o término do tempo T estabelecido. É correto afirmar que o tempo T, em minutos, é tal que

a) $T < 220$ b) $220 \leq T < 240$ c) $240 \leq T < 260$ d) $T \geq 260$

**23)** (Colégio Naval-78) Uma liga ouro e cobre contém 9 partes de ouro para 12 de cobre. Outra liga, também de ouro e cobre tem 60% de ouro. Para se obter uma liga com 36 gramas e partes iguais de ouro e cobre, devemos tomar das ligas iniciais:

(A) 12 gramas da 1ª e 24 gramas da 2ª.

(B) 24 gramas da 1ª e 12 gramas da 2ª.

(C) 18 gramas de cada uma.

(D) 21 gramas da 1ª e 15 gramas da 2ª.

(E) 16 gramas da 1ª e 20 gramas da 2ª.

**24)** (Colégio Naval-86) Uma empresa possui uma matriz M e duas filiais A e B. 45% dos empregados da empresa trabalham na matriz M e 25% dos empregados trabalham na filial A. De todos os empregados dessa empresa, 40% optaram por associarem-se a um clube classista, sendo que 25% dos empregados da matriz M e 45% dos empregados da filial A se associaram ao clube. O percentual dos empregados da filial B que associaram ao clube é de

(A) 17,5% (B) 18,5% (C) 30% (D) $58\frac{1}{3}\%$ (E) $61\frac{2}{3}\%$

**25)** (Colégio Naval-91) Um minério A tem massa igual a **5 kg** e contém **72%** de ferro, e um minério **B** de massa **m**, contém **58%** de ferro. A mistura dessas massas contém **62%** de ferro. A massa **m**, em **kg**, é:

a) 10 b) 10,5 c) 12,5 d) 15,5 e) 18,5

**26)** (Colégio Naval-92) A eleição para diretor de um colégio é feita por voto de qualidade dos votos válidos. Os votos dos professores valem **50%**, os votos dos alunos **45%** e os votos dos funcionários **5%**. Apurados os votos válidos, obteve-se a seguinte tabela:

| | Votaram em A | Votaram em B |
|---|---|---|
| ALUNOS | 600 | 480 |
| PROFESSORES | 15 | 180 |
| FUNCIONÁRIOS | 240 | 40 |

Sabendo-se que o resultado é homologado se, e somente se, o vencedor tiver **10%** mais que o oponente, pode-se concluir que:

a) não houver vencedor;

b) o candidato A venceu por uma margem aproximada de 20% dos votos válidos;

c) o candidato A venceu por uma margem aproximada de 30% dos votos válidos;

d) o candidato B venceu por uma margem aproximada de 20% dos votos válidos;

:) o candidato B venceu por uma margem aproximada de 30% dos votos válidos.

**27)** (Colégio Naval-80) Um comerciante vendeu $\frac{3}{10}$ de uma peça de fazenda com um lucro de 30% e a parte restante com um prejuízo de 10%. No total da operação, o comerciante:

(A) teve um lucro de 20%. (B) teve um lucro de 2%.

(C) teve um prejuízo de 20%. (D) teve um prejuízo de 20%.

(E) não teve lucro nem prejuízo

**28)** (Colégio Naval-17) Três pessoas, A, B e C, que fizeram uma prova de múltipla escolha tiveram o seguinte resultado: A acertou 50% das questões, respondendo corretamente 9 das 15 primeiras e $\frac{1}{5}$ das questões restantes; B acertou 20% do total mais 3 questões e C, 30% do total menos uma questão. Sendo a, b e c, a quantidade de acertos das pessoas A, B e C, respectivamente, podemos afirmar:

a) $a > b + c$ b) $a - b = 2c$ c) $a + b < 2c + 3$

d) $2b + 1 = a + c$ e) $2a - b > 3c$

**29)** (Colégio Naval-00) As vendas de uma empresa foram, em 1998, 60% superior às vendas de 1997. Em relação a 1998, as vendas de 1997 foram inferiores em:

a) 62,5% b) 60% c) 57,5% d) 44,5% e) 37,5%

**30)** (Colégio Naval-93) Num certo país, o governo resolveu substituir todos os impostos por um imposto único, que seria, no caso dos salários de **20%** sobre os mesmos. Para que um trabalhador receba, após o desconto, o mesmo salário que recebia antes, deverá ter um aumento sobre o mesmo de:
a) 15% b) 20% c) 25% d) 40% e) 50%

**31)** (Colégio Naval-95) Seja P o produto de 3 números positivos. Se aumentarmos dois deles de 20% e diminuirmos o outro de 40%, teremos que P:
(A) não se altera (B) aumenta de 13,6% (C) aumenta de 10%
(D) diminui de 10% (E) diminui de 13,6%

**32)** (Colégio Naval-96) Um comerciante aumentou o preço de uma mercadoria em 25%. Contudo a procura por essa mercadoria continuou grande. Então ele fez um novo aumento de 10%. Como o preço ficou muito alto, a mercadoria encalhou e, além disso, o prazo de validade estava vencendo. Finalmente fez um desconto para que o preço volta-se ao valor inicial. Este último desconto:
(A) foi de 35% (B) ficou entre 30% e 35%
(C) ficou entre 27% e 28% (D) foi de 25%
(E) ficou entre 22% e 25%

**33)** (Colégio Naval-97) Uma pessoa comprou uma geladeira para pagamento à vista obtendo um desconto de **10%**. Como a balconista não aceitou seu cheque, ele pagou com **119.565** moedas de um centavo. O preço da geladeira, sem desconto é:
a) R$ 1.284,20 b) R$ 1.284,50 c) R$ 1.326,25
d) R$ 1.328,50 e) R$ 1.385,25

**34)** (Colégio Naval-90) Um vendedor sempre coloca os seus produtos à venda com lucro de 70% sobre o preço do custo. Se o preço de custo de um certo produto aumentou de NCr$ 170,00, o que corresponde a 20% do preço que tal produto era vendido, o novo preço de venda é:
(A) NCr$ 850,00 (B) NCr$ 1.020,00 (C) NCr$ 1.139,00
(D) NCr$ 1.224,00 (E) NCr$ 1.445,00

**35)** (Colégio Naval-01) A ligação entre as cidades **A** e **B** pode ser feita por dois caminhos: $C_1$ e $C_2$. O caminho $C_1$ é mais curto, porém com mais tráfego, e o caminho $C_2$ é 14% mais longo do que $C_1$ mas possui tráfego menor, o que permite um aumento na velocidade de 20%. De quantos porcentos diminuirá o tempo de viagem para ir de A até B usando o caminho $C_2$?
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9
**Dado:** Considere as velocidades sempre constantes e as maiores possíveis.

**36)** (Colégio Naval-02) Considere-se um soro glicosado a 5% quando para cada 100ml de soro tem-se 5ml de glicose. Com dois soros X e Y, respectivamente, glicosados a 5% e 23%, deseja-se obter 3 litros de uma mistura com 8% de glicose. Portanto, necessita-se, em litros, de um volume do soro X igual a:
a) 2,5 b) 2,3 c) 2,1 d) 2,0 e) 1,8

**37)** (Colégio Naval-04) Um certo líquido aumenta o seu volume em **15%**, ao ser congelado. Quantos mililitros desse líquido deve-se colocar, no máximo, em um recipiente de **230** mililitros, sabendo-se que este não sofre qualquer alteração da sua capacidade nesse processo?
a) 195,5 b) 200 c) 205 d) 210 e) 215

**38)** (Colégio Naval-04) Um fabricante observou que tem condições de aumentar, mensalmente, a sua produção em $\frac{1}{5}$ da produção do mês anterior. Considerando a condição dada, se, em janeiro de **2004**, a sua produção for **P**, em que mês desse mesmo ano a sua produção será, pela primeira vez, maior ou igual a **2P**.
a) Abril b) Maio c) Junho d) Julho e) Agosto

**39)** (Colégio Naval-08) Um reservatório deve ser enchido completamente com uma mistura de 76% de gasolina e de 24% de álcool. A torneira que fornece gasolina enche este tanque, sozinha, em 4 horas, e a torneira que fornece álcool enche este tanque, sozinha, em 6 horas. Abrindo-se essas torneiras no mesmo instante, quanto tempo a mais uma delas deve ser deixada aberta, depois de a outra ser fechada, para que as condições estabelecidas sejam satisfeitas?
a) 1h 30 min b) 1h 36 min c) 1h 42 min
d) 1h 48 min e) 1h 54 min

**40)** (EPCAr-02) Em uma Escola, havia um percentual de 32% de alunos fumantes. Após uma campanha de conscientização sobre o risco que o cigarro traz à saúde, 3 em cada 11 dependentes do fumo deixaram o vício, ficando, assim, na Escola, 128 alunos fumantes. É correto afirmar que o número de alunos da Escola é igual a
a) 176 b) 374 c) 400 d) 550

**41)** (EPCAr-00) João gasta, mensalmente, 10% de seu salário com gasolina. Um aumento de 25% no preço desse combustível proporciona um acréscimo de R$ 120,00 em sua despesa mensal. O salário, em reais, de João é
a) 960 b) 1200 c) 3600 d) 4800

**42)** (Colégio Naval-18) Dois aumentos consecutivos de i% e 2i% correspondem a um aumento percentual igual a

a) $(i + i^2)\%$ b) $\left(3i + \frac{i^2}{50}\right)\%$ c) $(2i)^2\%$ d) $\left(3i + \frac{2i}{100}\right)\%$ e) $(3i)\%$

**43)** (EPCAr-02) Uma loja aumenta o preço de um determinado produto cujo valor é de R$ 600,00 para, em seguida, a título de "promoção", vendê-lo com "desconto" de 20% e obter, ainda, os mesmos R$ 600,00; então, o aumento percentual do preço será de

a) 20% b) 25% c) 30% d) 35%

**44)** (EPCAr-03) Uma pessoa, dispondo de certo capital, fez as seguintes aplicações em um ano:

1º) aplicou $\frac{2}{5}$ do capital em letras de câmbio, lucrando 30%;

2º) aplicou $\frac{1}{5}$ do capital em fundos de investimento, perdendo 20%;

3º) aplicou o restante em caderneta de poupança e seu lucro nessa aplicação foi de 25%.

Relativamente ao total aplicado, pode-se dizer que houve

a) lucro de 18% c) lucro de 13%

b) prejuízo de 14% d) prejuízo de 13%

**45)** (EPCAr-05) Uma fábrica de máquinas de lavar louças faz o lançamento do modelo M que é oferecido a certa loja de revenda ao preço unitário de R$ 750,00. Essa loja tem como estratégia de venda anunciar um preço x e dar 20% de desconto sobre o mesmo, para incentivar pagamentos à vista. Se ao final ela tem como objetivo lucrar 20% sobre o preço pago à fábrica, o valor x anunciado é tal que pertence ao intervalo

a) [900, 1000[ b) [1000, 1100[ c) [1100, 1200[ d) [1200, 1300[

**46)** (EPCAr-07) Em julho de 2005, Luiza gastava 27,3% do seu salário para o pagamento da prestação da casa própria. Em 2006, houve dois reajustes no seu salário: 4% em janeiro e 3% em junho. Se, em julho de 2006, o aumento da prestação foi de 13%, pode-se dizer que a porcentagem do novo salário que Luiza passou a gastar com a nova prestação foi de um número do intervalo

a) [28,29[ b) [29,30[ c) [30,31[ d) [31,32[

47) (EPCAr-07) Um determinado carro popular custa, numa revendedora, R$ 22.500,00 à vista. Numa promoção para queima de estoque, que será realizada em dezembro de 2006, com R$ 6.500,00 de entrada, um comprador tem o valor restante do carro facilitado em 36 prestações mensais, sendo que as prestações num mesmo ano são iguais e que a cada ano a prestação sofre um aumento de 10%, relativamente à do ano anterior. Sabendo-se que a primeira prestação a ser paga no mês de janeiro de 2007 é de R$ 500,00, pode-se afirmar que

a) o comprador desembolsará, ao final do 2° ano, excluindo a entrada, um valor maior que 12.800,00

b) o valor total a ser desembolsado na compra a prazo será de R$ 25.000,00

c) se o comprador adquirir o carro à vista e não optar pela promoção, economizará 17% do valor do carro à vista.

d) o valor total das prestações nos 36 meses é de R$ 19.860,00

48) (AFA-03) Em julho de 2001, uma pessoa gastava 27,3% do seu salário com o pagamento da prestação da casa própria. Em 2002, houve dois reajustes no seu salário: 40% em janeiro e 30% em junho. Se, em julho de 2002, o aumento daquela prestação foi de 130%, que porcentagem de seu salário a pessoa passou a gastar?

a) 29,7% b) 32,7% c) 34,5% d) 36,9%

48) (Escola Naval-93) Uma senhora extremamente gorda resolveu fazer uma dieta e perdeu em três meses 30% de seu peso; entretanto, nos três meses seguintes, ela aumentou seu peso em 40%. No decorrer desse semestre, o peso da senhora:

a) aumentou 16% b) aumentou 10%

c) manteve seu valor inicial d) diminuiu 10%

e) diminuiu 2%

50) (ENEM-09) Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodísel ao óleo dísel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1.° de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodísel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodísel, bem como possibilita a redução da importação de dísel de petróleo.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodísel ao dísel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodísel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final dísel/biodísel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodísel com a adição de 3%?

a) 27,75 milhões de litros. b) 37,00 milhões de litros.

c) 231,25 milhões de litros. d) 693,75 milhões de litros.

e) 888,00 milhões de litros.

51) (EEAR-04) Um par de sapatos custa, para o comerciante, R$ 58,00, e ele o coloca à venda com um acréscimo de 20% sobre o custo. Durante uma promoção, a loja passa a oferecer o sapato com 20% de desconto sobre o preço de venda, para o pagamento à vista. Na promoção, o preço do sapato passa a ser R$
a) 51,00. b) 55,68. c) 48,40. d) 42,00.

52) (FEI-08) O produto X é vendido à vista com 12% de desconto sobre o preço de tabela. Caso o consumidor queira adquiri-lo a prazo, haverá 5% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um indivíduo comprou o produto X a prazo por R$ 210,00. Se ele adquirisse tal produto à vista, ele pagaria:
a) R$ 200,00 b) R$ 184,80 c) R$ 176,00
d) R$ 189,50 e) R$ 192,30

53) (FGV-08) Certo capital C aumentou em R$ 1.200,00 e, em seguida, esse montante decresceu 11%, resultando em R$ 32,00 a menos do que C. Sendo assim, o valor de C, em R$, é
a) 9.600,00. b) 9.800,00. c) 9.900,00.
d) 10.000,00. e) 11.900,00.

54) (ENEM-17) Um programa de televisão criou um perfil em uma rede social, e a ideia era que esse perfil fosse sorteado para um dos seguidores, quando esses fossem em número de um milhão. Agora que essa quantidade de seguidores foi atingida, os organizadores perceberam que apenas 80% deles são realmente fãs do programa. Por conta disso, resolveram que todos os seguidores farão um teste, com perguntas objetivas referentes ao programa, e só poderão participar do sorteio aqueles que forem aprovados. Estatísticas revelam que, num teste dessa natureza, a taxa de aprovação é de 90% dos fãs e de 15% dos que não são fãs.
De acordo com essas informações, a razão entre a probabilidade de que um fã seja sorteado e a probabilidade de que o sorteado seja alguém que não é fã do programa é igual a
a) 1. b) 4. c) 6. d) 24. e) 96.

55) (ENEM-15) Um fornecedor vendia caixas de leite a um supermercado por R$ 1,50 a unidade. O supermercado costumava comprar 3 000 caixas de leite por mês desse fornecedor. Uma forte seca, ocorrida na região onde o leite é produzido, forçou o fornecedor a encarecer o preço de venda em 40%. O supermercado decidiu então cortar em 20% a compra mensal dessas caixas de leite. Após essas mudanças, o fornecedor verificou que sua receita nas vendas ao supermercado tinha aumentado.
O aumento da receita nas vendas do fornecedor, em reais, foi de
a) 540. b) 600. c) 900. d) 1260. e) 1500.

56) (Colégio Naval-11) A diferença entre um desconto de 50% e dois descontos sucessivos de 30% e 20% sobre o valor de R$ 40.000 é um valor inteiro.
a) múltiplo de 7. b) múltiplo de 9. c) múltiplo de 12.
d) ímpar. e) zero, pois os descontos são iguais.

57) (Olimpíada do Grande ABC-04) Um vendedor ambulante oferece três maneiras de descontos sobre um mesmo produto:
• Dois descontos sucessivos de 10%;
• Dois descontos sucessivos de 5% e 15% respectivamente;
• Um desconto de 20%.
Qual deles é o mais vantajoso para o cliente? Justifique.

58) (Olimpíada do Rio de Janeiro-07) Num determinado momento na final de futsal dos jogos escolares da Cidade de Tribobó do Norte, Fabinho percebeu que o número de meninos presentes no Ginásio era três vês mais que o número de meninas. Após a chegada de um ônibus com 72 meninas e 88 meninos, a porcentagem de meninas no Ginásio passou a ser 30%. Quantos meninos e quantas meninas passaram a estar no ginásio após da chegada desse ônibus?

59) (OBM-97) João e Pedro são vendedores e ganham R$ 1 000,00 de salário e comissão de 8% sobre as vendas. Em setembro, João ganhou R$ 2 000,00 e Pedro ganhou R$ 2 500,00. Nesse mês, as vendas de Pedro superaram as de João em:
A) 20% B) 25% C) 30% D) 40% E) 50%

60) (OBM-16) Um comerciante de carros usados vendeu dois carros pelo preço de 12000 reais cada um. Num deles, ele obteve um lucro de 20% sobre o custo e no outro, ele teve um prejuízo de 20% sobre o custo. Parece que ele não perdeu nem ganhou nada nessa negociação, mas na verdade teve prejuízo. No total, de quantos reais foi o prejuízo?

61) (OBM-01) Uma pêra tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pêra para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma).
A) 15 litros B) 45 litros C) 75 litros D) 80 litros E) 30 litros

62) (OBM-02) Um comerciante comprou dois carros por um total de R$ 27.000,00. Vendeu o primeiro com lucro de 10% e o segundo com prejuízo de 5%. No total ganhou R$ 750,00. Os preços de compra foram, respectivamente,
A) R$ 10.000,00 e R$ 17.000,00 B) R$ 13.000,00 e R$ 14.000,00
C) R$ 14.000,00 e R$ 13.000,00 D) R$ 15.000,00 e R$ 12.000,00
E) R$ 18.000,00 e R$ 9.000,00

**63)** (OBM-02) Durante sua viagem ao país das Maravilhas a altura de Alice sofreu quatro mudanças sucessivas da seguinte forma: primeiro ela tomou um gole de um líquido que estava numa garrafa em cujo rótulo se lia: "beba-me e fique 25% mais alta". A seguir, comeu um pedaço de uma torta onde estava escrito: "prove-me e fique 10% mais baixa"; logo após tomou um gole do líquido de outra garrafa cujo rótulo estampava a mensagem: "beba-me e fique 10% mais alta". Finalmente, comeu um pedaço de outra torta na qual estava escrito:"prove-me e fique 20% mais baixa". Após a viagem de Alice, podemos afirmar que ela:

a) ficou 1% mais baixa b) ficou 1% mais alta c) ficou 5% mais baixa
d) ficou 5% mais alta e) ficou 10% mais alta

**64)** (OBM-05) Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

A) 5% B) 7% C) 8% D) 20% E) 60%

**65)** (OBM-05) Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio *"Compre um e leve outro pela metade do preço"*. Outra promoção que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é

A) *"Leve dois e pague um"* B) *"Leve três e pague um"*
C) *"Leve três e pague dois"* D) *"Leve quatro e pague três"*
E) *"Leve cinco e pague quatro"*

**66)** (OBM-05) Películas de insulfilm são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Colocando-se uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, obtém-se uma redução de radiação solar igual a:

A) 3% B) 37% C) 40% D) 63% E) 160%

**67)** (OBM-05) Em certa cidade, acontece um fato interessante. Dez por cento dos Baianos dizem que são Paulistas e dez por cento dos Paulistas dizem que são Baianos. Todos os outros Paulistas e Baianos assumem a sua verdadeira origem. Dentre os Paulistas e Baianos, 20% dizem que são Paulistas. Que percentual os realmente Paulistas representam dentre os Paulistas e Baianos?

A) 12,5% B) 18% C) 20% D) 22% E) 22,5%

**68)** (OBM-07) Em uma prova de olimpíada, 15% dos estudantes não resolveram nenhum problema, 25% resolveram pelo menos um problema, mas cometeram algum erro, e os restantes, 156 estudantes, resolveram todos os problemas corretamente. O número de estudantes que participaram da olimpíada foi:

A) 200 B) 260 C) 93 D) 223 E) 300

69) (OBM-07) Uma loja de CD's realizará uma liquidação e, para isso, o gerente pediu para Anderlaine multiplicar todos os preços dos CD's por 0,68. Nessa liquidação, a loja está oferecendo um desconto de:
A) 68% B) 6,8% C) 0,68% D) 3,2% E) 32%

70) (OBM-07) Tintas pretas opacas absorvem 97% da luz, refletindo o restante. Cientistas desenvolveram uma nova cobertura superpreta que é "dez vezes mais preta" que tintas pretas opacas, querendo dizer que ela reflete 1/10 da luz refletida pelas tintas pretas opacas. Que porcentagem de luz a nova cobertura absorve?
A) 9,7 B) 90,3 C) 99,7 D) 99,9 E) 970

71) (OBM-04) Na população de uma espécie rara de 1000 aves da floresta amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?

72) (OBM-05) O tanque do carro de Esmeralda, com capacidade de 60 litros, contém uma mistura de 20% de álcool e 80% de gasolina ocupando metade de sua capacidade. Esmeralda pediu para colocar álcool no tanque até que a mistura ficasse com quantidades iguais de álcool e gasolina. Quantos litros de álcool devem ser colocados?

73) (OBM-05) Gabriel resolveu uma prova de matemática com questões de álgebra, geometria e lógica. Após checar o resultado da prova Gabriel observou que respondeu corretamente 50% das questões de álgebra, 70% das questões de geometria e 80% das questões de lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente 62% das questões de álgebra e lógica e 74% das questões de geometria e lógica. Qual a porcentagem de questões corretas da prova de Gabriel?

74) (OBM-15) Júlia comprou 3 camisetas iguais e pagou sua compra com desconto de 10%, enquanto que seu irmão comprou 2 camisetas iguais às de Júlia com desconto de 5%. Júlia gastou 12 reais a mais que seu irmão. Qual era, em reais, o preço sem desconto de cada camiseta?

75) (OBM-12) Na fase final da OBM, participaram 600 alunos de todo o Brasil. Seguindo a tradição das olimpíadas internacionais, na premiação são distribuídas medalhas de ouro, prata e bronze na proporção 1:2:3, respectivamente. Sabe-se que 60% do total de estudantes ganhou alguma das 3 medalhas. Quantos alunos ganharam medalha de prata?
A) 60 B)120 C)180 D) 240 E) 300

**Juros**

1) (CM Brasília-05) Carlos tomou emprestado de um amigo um capital de R$ 100,00 (cem reais) a uma taxa mensal de juros simples percentualmente igual à quantidade de meses que levará para saldar o empréstimo, de uma só vez. No mesmo dia, Carlos aplicou os R$ 100,00 em um investimento bancário cuja taxa de juros simples é de 24% ao mês. Para ter um lucro máximo nas operações financeiras realizadas, em quantos meses Carlos deverá saldar o empréstimo e manter o dinheiro aplicado simultaneamente?
A ( ) 12 B ( ) 36 C ( ) 96 D ( ) 120 E ( ) 144

2) (CM Brasília-05) Dois capitais, um de R$ 1260,00 e outro de R$ 1300,00, são aplicados a juros simples de 5% ao ano e 3% ao ano, respectivamente. Supondo que eles fiquem aplicados até se igualarem, no fim de quanto tempo esses montantes se igualarão?
A ( ) 1 ano B ( ) 1 ano e 6 meses C ( ) 1 ano e 8 meses
D ( ) 1 ano e 10 meses E ( ) 2 anos

3) (CM BH-16) Atualmente, a situação econômica do país está fazendo com que as lojas ofereçam vários planos de pagamentos. Com o objetivo de aumentar as vendas, uma revendedora de carros oferece dois planos:
(1) 39% de desconto para pagamento à vista.
(2) 25% de desconto para pagamento em 3 vezes iguais (entrada mais duas prestações).
Sabe-se que o dinheiro pode ser aplicado a uma taxa fixa de i% ao mês.
Identifique a alternativa que apresenta o valor de i para o qual é indiferente a escolha entre os dois planos.
a) 25. b) 27. c) 30. d) 20. e) 15.

4) (CM Brasília-09) Uma certa pessoa recebeu uma herança de seus avós. Observando a grande crise econômica existente na época, preferiu aplicar 1 / 6 de sua herança a 7% ao ano; 3/8 a 5% ao ano e o restante a 4% ao ano. Ao final de um ano, suas aplicações renderam R$ 7.020,00. Com base nesses dados, determine o valor da herança recebida.
A ( ) R$ 140.000,00 B ( ) R$ 144.000,00 C ( ) R$ 148.000,00
D ( ) R$ 152.000,00 E ( ) R$ 156.000,00

5) (CM BH-14) Uma quantia foi aplicada a juros simples de 3% ao mês, durante 4 meses e, em seguida, o montante foi aplicado durante mais 5 meses, a juros simples de 2% ao mês. No final dos 9 meses, o novo montante foi de R$616,00. Qual o valor, em reais, da quantia aplicada inicialmente?
a) 500 b) 600 c) 480 d) 550 e) 450

6) (ENEM-11) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:
Investimento A: 3% ao mês
Investimento B: 36% ao ano
Investimento C: 18% ao semestre
As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

| n | $1,03^n$ |
|---|---|
| 3 | 1,093 |
| 6 | 1,194 |
| 9 | 1,305 |
| 12 | 1,426 |

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá
a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

7) (CM Manaus-10) Sr. Josias fez seu testamento deixando sua herança para seus dois únicos filhos: Antônio, o mais velho, e José. Resolveu dividir sua herança em duas partes de tal forma que a primeira parte produza em 6 meses o mesmo juro que a segunda em 3 meses, considerando as aplicações feitas com a mesma taxa de juros. Sabendo que sua herança está avaliada em R$ 360.000,00 e que a parte maior coube ao filho mais velho, qual a quantia que será herdada por José?
A) R$ 100.000,00 B) R$ 240.000,00 C) R$ 120.000,00
D) R$ 200.000,00 E) R$ 140.000,00

8) (Colégio Naval-99) Se uma pessoa aplica somente 2/5 de seu capital em letras durante 90 dias, à taxa de 2,5% ao mês (juros simples) e recebe R$ 9.600,00 de juros, então seu capital é de:
(A) R$ 128.000,00 (B) R$ 240.000,00 (C) R$ 320.000,00
(D) R$ 400.000,00 (E) R$ 960.000,00

9) (CM RJ-04) Ao pesquisar as condições de compra de sua boina nova, um aluno do Colégio Militar soube, pelo lojista, que poderia pagar das seguintes maneiras: à vista, com 10 % de desconto sobre o preço de tabela, que era de R$ 50,00, ou então, em duas vezes sem juros, através de duas parcelas de R$ 25,00, sendo a primeira paga no ato da compra. Embora o lojista tenha afirmado que não há juros no pagamento a prazo, percebemos a existência de juros embutidos, que são omitidos do cliente. A taxa de juros cobrada pelo lojista é de:
A) 8,75 %. B) 10 %. C) 11,11 %. D) 15 %. E) 25 %.

10) (Epcar-12) Sr José tinha uma quantia x em dinheiro e aplicou tudo a juros simples de 5% ao ano. Terminado o primeiro ano, reuniu o capital aplicado e os juros e gastou 1/3 na compra de material para construção de sua casa. O restante do dinheiro ele investiu em duas aplicações: colocou 5/7 a juros simples de 6% ao ano e o que sobrou a juros simples de 5% ao ano, recebendo assim, 700 reais de juros relativos a esse segundo ano. Pode-se afirmar, então, que a quantia x que o Sr. José tinha é um número cuja soma dos algarismos é
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

11) (Epcar-11) Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias x e y reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:
1) Mateus aplicou a quantia y durante um tempo que foi metade do que esteve aplicado a quantia x de Lucas.
2) Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.
3) No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.
Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então x – y é igual a
a) R$ 103,20 c) R$108,30
b) R$106,40 d) R$109,60

12) (Colégio Naval-95) Um capital C foi aplicado a uma taxa mensal numericamente igual ao capital. Quantos meses são necessários para que os juros simples sejam iguais ao quadrado do capital?
(A) 20 (B) 50 (C) 100 (D) 200 (E) 400

13) (CM Manaus-10) Renata aderiu a um consórcio para a aquisição de um automóvel que deve ser pago em 60 parcelas. A prestação vence no dia 05 de todo mês e o valor é de R$ 480,00. Em caso de atraso o caixa está autorizado a receber o pagamento desde que cobre uma multa de R$ 27,00 mais um juro simples de 1% por dia de atraso. No mês de outubro, Renata esqueceu de efetuar o pagamento no

dia certo e só veio a fazê-lo com sete dias de atraso. Qual o valor que ela pagou, acrescidos os encargos de juros e multa?

A) R$ 530,60 B) R$ 511,80 C) R$ 507,00
D) R$ 513,60 E) R$ 540,60

14) (Colégio Naval-06) Em quantos meses, no mínimo, um capital aplicado segundo a taxa simples de 0,7% ao mês produz um montante que supera o dobro do seu valor?

a) 140 b) 141 c) 142 d) 143 e) 144

15) (Colégio Naval-07) Uma instituição financeira abaixou a sua taxa de juros de 2,5% para 2,0%. Assinale a opção que apresenta, em percentagem, a redução sobre a taxa inicial.

a) 0,5 b) 5 c) 7,5 d) 15 e) 20

16) (Colégio Naval-08) Uma dívida, contraída à taxa de juros simples de 10% ao mês deverá ser paga em duas parcelas, respectivamente iguais a R$ 126,00, daqui a 4 meses, e R$ 192,00 daqui a 6 meses. Caso essa mesma dívida fosse paga em duas parcelas iguais, uma daqui a 4 meses, e a outra daqui a 6 meses, qual seria a diferença entre as somas dos valores pagos em cada caso?

a) R$ 4,30 b) R$ 4,40 c) R$ 4,50 d) R$ 4,60 e) R$ 4,70

17) (EPCAr-07) Ao desfazer uma sociedade, dois sócios A e B fizeram a retirada de suas partes que eram diretamente proporcionais a 1 e 3. O sócio A aplicou, então, o valor de sua retirada à taxa de 50% ao ano. Já o sócio B aplicou a sua parte à taxa de 25% ao ano e 2/3 do montante que recebeu após 12 meses foi igual a 150.000 reais. Pode-se afirmar que

a) a diferença entre os rendimentos dos sócios A e B, após 12 meses, é, em milhares de reais, um número do intervalo [8, 15]
b) a soma dos capitais retirados por A e B é igual ao montante que o sócio B conseguiu após 12 meses.
c) o rendimento obtido pelo sócio A é igual a 30% do rendimento do sócio B.
d) o capital retirado pelo sócio A e o rendimento conseguido pelo sócio B são valores iguais.

18) (EEAR-02) Uma pessoa emprega R$ 25,00 em duas parcelas: a 1ª a 3% ao mês e a 2ª a 2% ao mês e recebe anualmente R$ 7,20 de juros simples. O valor da maior parcela empregada, em R$, é

a) 8 b) 10 c) 12 d) 15

19) (ESSA-12) Assinale a alternativa que represente o tempo necessário para que uma pessoa que aplicou R$2000,00, à taxa de 10% ao ano, receba R$ 662,00 de juros.

A) 36 meses B) 1 ano e meio C) 3 meses
D) 2 anos E) 6 anos

20) (Epcar-13) Gabriel aplicou R$ 6 500.00 a juros simples em dois bancos. No banco A, ele aplicou uma parte a 3% ao mês durante 5/6 de um ano: no banco B, aplicou o restante a 3,5% ao mês, durante 3/4 de um ano. O total de juros que recebeu nas duas aplicações foi de R$ 2002,50 Com base nessas informações, é correto afirmar que

a) é possível comprar um televisor de R$ 3100.00 com a quantia aplicada no banco A
b) o juro recebido com a aplicação no banco A foi menor que R$ 850,00
c) é possível comprar uma moto de R$ 4600,00 com a quantia recebida pela aplicação no banco B
d) o juro recebido com a aplicação no banco B foi maior que R$ 1110.00

21) (UFPR-08) Luiz Carlos investiu R$ 10.000,00 no mercado financeiro da seguinte forma: parte no fundo de ações, parte no fundo de renda fixa e parte na poupança. Após um ano ele recebeu R$ 1.018,00 em juros simples dos três investimentos. Nesse período de um ano, o fundo de ações rendeu 15%, o fundo de renda fixa rendeu 10% e a poupança rendeu 8%. Sabendo que Luiz Carlos investiu no fundo de ações apenas metade do que ele investiu na poupança, os juros que ele obteve em cada um dos investimentos foram:

a) R$ 270,00 no fundo de ações, R$ 460,00 no fundo de renda fixa e R$ 288.00 na poupança.
b) R$ 300,00 no fundo de ações, R$ 460,00 no fundo de renda fixa e R$ 258,00 na poupança.
c) R$ 260,00 no fundo de ações, R$ 470,00 no fundo de renda fixa e R$ 288.00 na poupança.
d) R$ 260.00 no fundo de ações, R$ 480.00 no fundo de renda fixa e R$ 278,00 na poupança.
e) R$ 270,00 no fundo de ações, R$ 430,00 no fundo de renda fixa e R$ 318.00 na poupança.

22) (Fuvest-06) João, Maria e Antônia tinham, juntos, R$ 100.000,00. Cada um deles investiu sua parte por um ano, com juros de 10% ao ano. Depois de creditados seus juros no final desse ano, Antônia passou a ter R$ 11.000,00 mais o dobro do novo capital de João. No ano seguinte, os três reinvestiram seus capitais, ainda com juros de 10% ao ano. Depois de creditados os juros de cada um no final desse

segundo ano, o novo capital de Antônia era igual à soma dos novos capitais de Maria e João. Qual era o capital inicial de João?

a) R$ 20.000,00 b) R$ 22.000,00 c) R$ 24.000,00
d) R$ 26.000,00 e) R$ 28.000,00

**23)** (FGV-06) A rede Corcovado de hipermercados promove a venda de uma máquina fotográfica digital pela seguinte oferta: "Leve agora e pague daqui a 3 meses". Caso o pagamento seja feito à vista, Corcovado oferece ao consumidor um desconto de 20%. Caso um consumidor prefira aproveitar a oferta, pagando no final do 3º mês após a compra, a taxa anual de juros simples que estará sendo aplicada no financiamento é de:

a) 20% b) 50% c) 100% d) 80% e) 120%

**24)** (ENEM-17) Um empréstimo foi feito a taxa mensal de i%, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P. O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela. A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

a) $P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$ b) $P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{2i}{100})}\right]$

c) $P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$ d) $P\left[\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{2i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{3i}{100})}\right]$

e) $P\left[\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^3}\right]$

**25)** (FGV-06) João investiu R$ 10000,00 num fundo de renda fixa que remunera as aplicações à taxa de juro composto de 20% ao ano, com o objetivo de comprar um automóvel cujo preço atual é R$ 30000,00, que é desvalorizado à taxa de juro de 10% ao ano. Depois de quantos anos, João conseguirá adquirir o automóvel pretendido?

**26)** (Unesp-04) Uma loja vende um produto no valor de R$ 200,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista, com 10% de desconto, ou em duas

prestações mensais de mesmo valor, sem desconto, a primeira sendo paga no momento da compra. A taxa mensal de juros embutida na venda a prazo é de
(A) 5%. (B) 10%. (C) 20%. (D) 25%. (E) 90%.

**27)** (Unesp-08) Cássia aplicou o capital de R$15.000,00 a juros compostos, pelo período de 10 meses e à taxa de 2% a.m. (ao mês). Considerando a aproximação $(1,02)^5 = 1,1$, Cássia computou o valor aproximado do montante a ser recebido ao final da aplicação. Esse valor é:
A) R$18.750,00. B) R$18.150,00. C) R$17.250,00.
D) R$17.150,00. E) R$16.500,00.

**28)** (Unesp-10) Desejo ter, para minha aposentadoria, 1 milhão de reais. Para isso, faço uma aplicação financeira, que rende 1% de juros ao mês, já descontados o imposto de renda e as taxas bancárias recorrentes. Se desejo me aposentar após 30 anos com aplicações mensais fixas e ininterruptas nesse investimento, o valor aproximado, em reais, que devo disponibilizar mensalmente é: (Dado: $1,01^{361} \approx 36$)
A) 290,00. B) 286,00. C) 282,00. D) 278,00. E) 274,00.

**29)** (UFCG-06) Um pequeno empresário aplicou um capital de X reais durante 3 anos consecutivos, à taxa de 10% ao ano no regime de juros simples, recebendo ao final Y reais. Se o mesmo capital fosse aplicado, durante esse período e no regime de juros compostos, o empresário teria recebido (Y + 3.100) reais. Sabendo-se que 40% dos juros obtidos foram destinados a um investimento na empresa, pode-se concluir que esse investimento foi de
a) R$ 11.000,00 b) R$ 13.000,00 c) R$ 14.000,00
d) R$ 15.000,00 e) R$ 12.000,00

**30)** (UFCG-07) Godofredo depositou 1.000 reais na caderneta de poupança de um banco a uma taxa de juro composto de 0,7% ao mês. O banco empresta esta mesma quantia aos seus clientes a uma taxa de juro composto de 8% ao mês, o que equivale aproximadamente a uma taxa anual de juro composto de 151,82%. Utilizando a aproximação $(1 + x)^n = 1 + nx$ se $|x| < 0,01$ e $n \leq 18$ é correto afirmar que após um ano, a diferença entre os montantes arrecadados pelo banco e por Godofredo é :
a) R$ 1.434,20 b) R$ 717,10 c) R$2.868,40
d) R$ 1.000,00 e) R$ 358,55

**31)** (Unemat-11) Uma promissória que possui valor nominal de R$ 1.500,00 é descontada no banco 02 (dois) meses antes do seu vencimento. Se a taxa de desconto cobrada pelo banco é de 5% a.m., qual é o valor efetivo da promissória?
a. R$ 1.470,00 b. R$ 1.250,00 c. R$ 1.300,00
d. R$ 1.350,00 e. R$ 1.800,00

32) (ESSA-14) O capital, em reais, que deve ser aplicado à taxa mensal de juros simples de 5%, por 4 meses, para se obter juros de R$ 400,00 é igual a,
A) 1.600,00 B) 1.800,00 C) 2.000,00 D) 2.400,00 E) 2.500,00

33) (Unifor-11) Luiz deseja fazer um empréstimo. Para isso, ele fez uma pesquisa em dois bancos: A e B. No banco A, ele irá pagar 7% de taxa anual composta mensalmente, e o banco B oferece 6,9% de taxa anual composta diariamente. Qual a melhor opção que Luiz poderia decidir se o depósito inicial de pagamento fosse de R$ 100,00 para um crédito X?
(A) Banco A, com o rendimento anual efetivo de aproximadamente 7,23%.
(B) Banco B, com o rendimento anual efetivo de aproximadamente 7,14%.
(C) Banco A, com o rendimento anual efetivo de aproximadamente 7,14%.
(D) Banco B, com o rendimento anual efetivo de aproximadamente 7,23%.
(E) Ele poderia escolher qualquer opção. Tanto o banco A quanto o banco B teriam rendimento efetivo iguais.

34) (Unifei-08) Durante quanto tempo deve ser aplicado um determinado capital, a juros simples e à taxa de 0,75% ao mês para que o montante, no final da aplicação, seja igual a $\frac{9}{5}$ do capital aplicado?

35) (Fuvest-06) João, Maria e Antônia tinham, juntos, R$100.000,00. Cada um deles investiu sua parte por um ano, com juros de 10% ao ano. Depois de creditados seus juros no final desse ano, Antônia passou a ter R$11.000,00 mais o dobro do novo capital de João. No ano seguinte, os três reinvestiram seus capitais, ainda com juros de 10% ao ano. Depois de creditados os juros de cada um no final desse segundo ano, o novo capital de Antônia era igual à soma dos novos capitais de Maria e João. Qual era o capital inicial de João?
a) R$20.000,00 b) R$22.000,00 c) R$24.000,00
d) R$26.000,00 e) R$28.000,00

36) (Fuvest-09) No próximo dia 08/12, Maria, que vive em Portugal, terá um saldo de 2.300 euros em sua conta corrente, e uma prestação a pagar no valor de 3.500 euros, com vencimento nesse dia. O salário dela é suficiente para saldar tal prestação, mas será depositado nessa conta corrente apenas no dia 10/12. Maria está considerando duas opções para pagar a prestação:
1. Pagar no dia 8. Nesse caso, o banco cobrará juros de 2% ao dia sobre o saldo negativo diário em sua conta corrente, por dois dias;
2. Pagar no dia 10. Nesse caso, ela deverá pagar uma multa de 2% sobre o valor total da prestação.
Suponha que não haja outras movimentações em sua conta corrente. Se Maria escolher a opção 2, ela terá, em relação à opção 1,

a) desvantagem de 22,50 euros.
b) vantagem de 22,50 euros.
c) desvantagem de 21,52 euros.
d) vantagem de 21,52 euros.
e) vantagem de 20,48 euros.

37) (AFA-05) Uma casa que custa R$ 50.000,00 à vista pode ser comprada conforme um dos dois financiamentos abaixo:
I – 50% de entrada e o restante, ao final de 2 meses, com juros compostos de 5% ao mês.
II – R$ 20.000,00 de entrada e uma parcela de R$ 36.300,00, ao final de x meses com juros compostos de 10% ao mês.
De acordo com a situação acima, é **FALSO** afirmar que
a) o financiamento I é mais vantajoso que o financiamento II
b) o valor pago a prazo no financiamento II corresponde a 72,6% do preço da casa à vista.
c) o valor dos juros do financiamento I, corresponde a 5,2% do valor da casa à vista.
d) quem optar pelo financiamento II pagará a parcela de R$ 36.300,00 ao final de dois meses.

38) (FGV-20) Com a finalidade de fazer uma reserva financeira para usar daqui a 10 anos, Luís planejou o seguinte investimento: depositar no mês 1 a quantia de R$ 500,00 e, em cada mês subsequente, depositar uma quantia 0,4% superior ao depósito do mês anterior, em uma aplicação financeira que rende 0,5% ao mês, capitalizado mensalmente. Nessas condições, ao final de 10 anos, após o último depósito, ele poderá resgatar dessa aplicação o montante, em reais, igual a

a) $500.\sum_{n=0}^{119}(1{,}005^{n}.1{,}004^{119-n})$
b) $500.\sum_{n=1}^{120}(1{,}005^{n}.1{,}004^{120-n})$
c) $500.\sum_{n=1}^{120}(1{,}005^{n}.0{,}004^{120-n})$
d) $500.\sum_{n=0}^{199}(1{,}005^{n}.0{,}004^{119-n})$
e) $500.\sum_{n=1}^{120}(1{,}005^{n}.1{,}004^{120-n})$

# OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

## 6.1. DEFINIÇÕES:

• **Grandezas conhecidas e desconhecidas (incógnitas):** no estudo de um problema, algumas das grandezas possuem seus valores conhecidos ou supostamente conhecidos. Quando o valor numérico de uma grandeza não é fornecido, mas é deixado bastante claro que se supõe conhecido seu valor, esta grandeza deve ser representada por um símbolo, que geralmente é a letra inicial do nome da grandeza ou as primeiras letras do nosso alfabeto. As incógnitas são os valores a serem determinados em um problema e são sempre representados por letras, que podem ser a letra inicial do nome da grandeza ou, geralmente, as últimas letras do nosso alfabeto.

• **Variável e constante:** as quantidades algébricas também podem ser classificadas em variáveis ou constantes. As constantes são as grandezas que conservam seu valor, independentemente da variação das condições em que o fenômeno está sendo estudado. Geralmente, as constantes são representadas pelas primeiras letras do nosso alfabeto. Por outro lado, as grandezas variáveis são aquelas que mudam de valor quando as condições do problema são alteradas. Geralmente são representadas pela inicial do nome da variável ou pelas últimas letras do nosso alfabeto.

• **Expressão numérica e expressão literal:** quando os valores das grandezas conhecidas são dados no enunciado do problema e somente as variáveis são desconhecidas, diz-se que a expressão é numérica. Entretanto, se os valores supostamente conhecidos são representados por letras, a expressão é denominada de literal.

• **Sinais de operações:** para indicar a soma emprega-se o sinal +, para indicar subtração usa-se o sinal −, para representar multiplicação utiliza-se × ou . (um ponto), para representar divisão faz-se uso dos sinais ÷ ou /, para indicar potenciação usa-se a notação $a^n$ (lê-se "a elevado a n", como já estudado no capítulo 1 deste livro), para representar radiciação emprega-se a notação $\sqrt[n]{a}$ (lê-se "raiz enésima de a", também estudado no capítulo 1).

• **Igualdade e identidade:** para representar que duas expressões A e B são iguais emprega-se a notação A = B. Para representar que duas expressões algébricas são idênticas usa-se a notação A ≡ B.

• **Desigualdades:** Os sinais de desigualdades são > (lê-se "maior do que"), < (lê-se "menor do que"), ≥ (lê-se "maior ou igual a") e ≤ (lê-se "menor ou igual a").

• **Expressões algébricas:** são as expressões que contém as variáveis submetidas às seis operações elementares (adição, subtração, multiplicação, divisão,

potenciação e radiciação), não incluindo as potências de expoente variável e as raízes de índice variável. Por exemplo, $5x^2y^{-1}z^{-5}$, $x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ e $4ab + x\sqrt{y}$ são expressões algébricas.

- **Expressões algébricas racionais e irracionais**: expressões racionais são as que não contêm variáveis dentro de um radical e também que não possuem variáveis com expoente fracionário. Por exemplo, são racionais as expressões $xy + 3x^2 - 4y^3$, $\frac{x^2+y+3}{x^2-2z}$, enquanto que são irracionais as expressões $x^2 + \sqrt{x.y}$, $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $4x^3 - \sqrt[3]{x}$.

- **Expressões de uma e de mais de uma variável**: pode-se classificar as expressões de acordo com o número de variáveis. Por exemplo, supondo que a, b e c são constantes, $ax^2 + bx + c$ e $\frac{ax^2+b}{cx+7}$ são expressões algébricas de uma variável (nos dois casos a variável é x), enquanto que $ax^2 + \frac{b}{cy}$ e $\frac{ax+by+cz}{ax-by-cz}$ são expressões algébricas de mais de uma variável, no caso a 1ª é de duas variáveis (x e y) e a 2ª é de três variáveis (x, y e z).

- **Termo**: é a parte fundamental das expressões algébricas. É constituído das variáveis e constantes interligadas pelas operações elementares, com exceção da adição e subtração. Por exemplo, $4x^3y$, $-\frac{2x}{y}$, $-\frac{5a^2x^3}{6b^5y^2}$ representam termos de uma expressão algébrica. Na expressão algébrica $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ os termos que a compõe são $x^3$, $3x^2y$, $3xy^2$ e $y^3$. Um termo é constituído de três partes: sinal, coeficiente e parte literal. Sinal é o + ou − que está escrito à frente do termo. Quando o sinal é + não é necessário escrevê-lo nos monômios ou no primeiro termo de um polinômio. Coeficiente de um termo é o número que nele figura. Para determiná-lo é preciso saber quais são as constantes e quais são as variáveis que compõe o termo. Por exemplo, no termo $7a^3bx^2y^4$ se a e b são constantes e x e y forem as variáveis, então $7a^3b$ é o coeficiente do termo. Porém, se a, b, x e y forem variáveis, então o coeficiente é somente o número 7. A parte literal de um termo é composta por suas variáveis. Por exemplo, no termo $-12a^2b^3x^4y^{-7}$, se a e b forem constantes, a parte literal é $x^4y^{-7}$.

- **Monômio**: é a expressão algébrica constituída de um só termo. Por exemplo, a expressão algébrica $\frac{7x^3}{2\sqrt{y}}$ é um monômio.

- **Polinômio**: é a expressão algébrica constituída de um ou mais termos. O polinômio constituído de um termo é chamado de monômio, o constituído de dois

termos é denominado de binômio e ao constituído de três termos é denominado de trinômio. Por exemplo, a expressão algébrica $5x^5y - 8x^2y^6 + 9xy^3$ é um polinômio nas variáveis x e y.

- **Termos semelhantes**: são aqueles que têm a mesma parte literal. Logo, supondo que a e b são constantes e x e y são variáveis, os termos $7a^2bx^3y^7$ e $-9a^3b^2a^3y^7$ são semelhantes.

- **Redução de termos semelhantes**: Para reduzir dois ou mais termos semelhantes basta compor um termo que possui a mesma parte literal destes termos e cujo coeficiente é igual à soma dos seus coeficientes, levando em consideração seus sinais. Assim, temos que $5x^2y^3 + 9x^2y^3 = 14x^2y^3$ e também que $-8a^2bc^5 + 2a^2bc^5 - 3a^2bc^5 = -9a^2bc^5$.

- **Grau de um monômio**: grau de um monômio é igual à soma dos expoentes das variáveis que formam o monômio, levando-se em consideração o sinal de cada expoente. Desta forma, o grau do monômio $26x^3y^6z^{-5}$ vale $3 + 6 + (-5) = 4$. Esta definição também se aplica quando há expoentes fracionários. Por exemplo, para calcular o grau do monômio $P = \frac{3x^2}{\sqrt[3]{y}}\sqrt{\frac{z^5}{w^9}}$ bastar reescrevê-lo da forma $P = 3x^2y^{-\frac{1}{3}}z^{\frac{5}{2}}w^{-\frac{9}{2}}$ e somar os expoentes: $2 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{1}{3}$. Para representar o grau de um polinômio P utiliza-se a simbologia $\partial P$. Assim, no exemplo anterior pode-se afirmar que $\partial P = -1/3$.

- **Grau de um polinômio**: grau de um polinômio é igual ao maior dos graus dos termos que compõe o polinômio. Por exemplo, no polinômio $P = 3x^2yz^4 - 7x^4y^2 - 18x^6z^7$, nas variáveis x, y e z, os graus dos termos que compõe o polinômio são 7, 6 e 13, logo se conclui que $\partial P = 13$.

- **Valor numérico de uma expressão algébrica**: é o valor que se obtém substituindo as variáveis por números e efetuando os cálculos. No cálculo do valor numérico da expressão $6x^2y^3 - xy^4 + 2x^5y$ para $x = -1$ e $y = 2$ basta fazer:

$$6(-1)^2(2)^3 - (-1)(2)^4 + 2(-1)^5(2) = 48 + 16 - 4 = 60.$$

## 6.2. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

**6.2.1. Adição:** Adição é a operação que tem por fim, dadas duas ou mais expressões algébricas, achar a expressão mais simples que tenha para valor numérico a soma dos valores numéricos das expressões dadas, quaisquer que sejam os valores atribuídos às variáveis que nelas figurem. As expressões dadas denominam-se **parcelas** e o resultado de **soma**. *Para somar duas ou mais expressões algébricas, escrevem-se as parcelas seguidas uma das outras e faz-se a redução dos termos semelhantes, se houver.* Por exemplo, sendo *a* e *b* constantes e x e y variáveis, para somar as expressões $3a^2bx^2y^3 - 7ab^3xy^4 + 9a^3bx^3y^2$, $- 8ab^2xy^4 + abx^5$, $6a^2b^2x^2y^3 - 8a^3b^4xy^4 + 9aby^5$, inicialmente deve-se observar quais são os termos semelhantes que aparecem em mais de duas expressões algébricas: termos com parte literal $x^2y^3$ aparecem na 1ª e na 3ª equações, termos com parte literal $xy^4$ aparecem na 1ª, 2ª e 3ª equações. Agora basta aplicar a regra já apresentada:

$$(3a^2bx^2y^3 - 7ab^3xy^4 + 9a^3bx^3y^2) + (- 8ab^2xy^4 + abx^5) + (6a^2b^2x^2y^3 - 8a^3b^4xy^4 + 9aby^5) =$$
$$= (3a^2b + 6a^2b^2)x^2y^3 + (- 7ab^3 - 8ab^2 - 8a^3b^4)xy^4 + 9a^3bx^3y^2 + abx^5 + 9aby^5$$

**6.2.2. Subtração:** Para efetuar a subtração das expressões algébricas A e B basta fazer a soma a expressão A com o oposto da expressão B, obtendo assim o valor de

$$A + (- B) = A - B.$$

## 6.3. MULTIPLICAÇÃO

**6.3.1. Produto de monômios:** o resultado da multiplicação de dois ou mais monômios é um monômio cujo coeficiente é igual ao produto dos coeficientes de todos os termos e cujos expoentes das variáveis são iguais à soma dos expoentes respectivos a cada variável. Por exemplo, sendo x, y, z e w variáveis:

$$(4x^2y^3)(- 3x^4z^6)(5z^{-8}w^{-3}) = [(4)(- 3)(5)]x^{2+4}y^3z^{6-8}w^{-3} = - 60x^6y^3z^{-2}w^{-8}$$

**6.3.2. Potência de monômios:** a potência de monômios respeita à regra da potência de números reais, já apresentada neste livro no capítulo 1. Desta forma, sendo C uma constante, x e y variáveis e n um número real: $(Cx^ay^b)^n = C^nx^{a.n}y^{b.n}$

**6.3.3. Produto de polinômio por um monômio:** para multiplicar um polinômio por um monômio, multiplicam-se os termos do polinômio pelo monômio e somam-se os produtos obtidos. Assim, sendo $A_1$, $A_2$, .... $A_n$ os fatores que compõe o polinômio e M o monômio, segue que:

$$(A_1 + A_2 + ... + A_n)M = A_1.M + A_2.M + ... + A_n.M$$

Por exemplo, para multiplicar o polinômio $2x^3 - 7x^2y + 3xy^2$ pelo monômio $- 2x^2y^3$ procede-se da seguinte maneira:

$$(2x^3 - 7x^2y + 3xy^2)(- 2x^2y^3) = (2x^3)(- 2x^2y^3) + (- 7x^2y)(- 2x^2y^3) + (3xy^2)(- 2x^2y^3) =$$
$$= [(2)(- 2)x^{3+2}y^{1+3}] + [(- 7)(- 2)x^{2+2}y^{1+3}] + [(3)(- 2)x^{1}y^{2+3}] = - 4x^5y^4 + 14x^4y^4 - 6x^3y^4$$

**6.3.4. Produto de polinômio por polinômio:** para multiplicar um polinômio por outro, multiplicam-se os termos do primeiro polinômio por cada termo do segundo e somam-se os produtos obtidos, efetuando as respectivas reduções, quando for o caso. Desta maneira, se $A_1, A_2, ..., A_n$ são os termos do polinômio P e $B_1, B_2, ..., B_m$ são os fatores do polinômio Q:

$$P.Q = (A_1 + A_2 + ... + A_n)(B_1 + B_2 + ... + B_m) =$$
$$= A_1B_1 + A_1B_2 + ... + A_1B_m + A_2B_1 + A_2B_2 + ... + A_nB_m + A_nB_1 + A_nB_2 + ... + A_nB_m$$

Por exemplo:

$$(3x^2y - 2x^3)(xy^2 - 8y^3 + 4x^2y) =$$
$$= (3x^2y)(xy^2) + (3x^2y)(-8y^3) + (3x^2y)(4x^2y) + (-2x^3)(xy^2) + (-2x^3)(-8y^3) + (-2x^3)(4x^2y) =$$
$$= 3x^3y^3 - 24x^2y^4 + 12x^4y^2 - 2x^4y^2 + 16x^3y^3 - 8x^5y = -8x^5y + 10x^4y^2 + 19x^3y^3 - 24x^2y^4$$

Uma consequência do produto polinomial é quanto ao grau do produto. Considere que o $\partial P = n$ e $\partial Q = m$. Quando os polinômios P e Q são multiplicados o termo de maior grau é exatamente o que resulta da multiplicação dos termos de maior grau de P e Q. Assim, a soma dos expoentes do termo de maior grau de P.Q é igual à soma dos graus de P e Q:

$$\partial(P.Q) = \partial P + \partial Q.$$

No exemplo anterior, perceba que o grau de $3x^2y - 2x^3$ é 3 e o grau de $xy^2 - 8y^3 + 4x^2y$ também vale 3. O produto possui grau 6, conforme descrito pela fórmula do grau do produto.

O produto polinomial possui propriedades importantes, a saber:

**i) comutativa:** $P.Q = Q.P$

**ii) associativa:** $P.(Q.R) = (P.Q).R$

**iii) distributiva:** $P(Q + R) = P.Q + P.R$

**iv) elemento neutro:** existe $P = 0$ tal que $P.Q = 0$

**v) elemento identidade:** existe $P = 1$ tal que $P.Q = Q$

## 6.4. PRODUTOS NOTÁVEIS

Produtos notáveis são igualdades algébricas que respeitam leis especiais de formação e por isso são efetuadas sem que seja necessário efetuar a regra da multiplicação de polinômios. Abaixo estão listados os principais produtos notáveis.

### 6.4.1. Quadrado da soma: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o dobro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo. A demonstração é bem simples, bastando observar que:

$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x.x + x.y + y.x + y.y = x^2 + 2xy + y^2$

### 6.4.2. Quadrado da diferença: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

O quadrado da diferença entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o dobro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo:

$(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x.x - x.y - y.x + y.y = x^2 - 2xy + y^2$

### 6.4.3. Cubo da soma: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, mais o triplo do produto do quadrado do primeiro pela segunda, mais o triplo do produto do primeiro pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo termo. Demonstração:

$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) =$
$x.x^2 + x(2xy) + x.y^2 + y.x^2 + y(2xy) + y.y^2 = x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 =$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

### 6.4.4. Cubo da diferença: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, menos o triplo do produto do quadrado do primeiro pela segunda, mais o triplo do produto do primeiro pelo quadrado do segundo, menos o cubo do segundo termo. Demonstração:

$(x - y)^3 = (x - y)(x - y)^2 = (x - y)(x^2 - 2xy + y^2) =$
$x.x^2 - x(2xy) + x.y^2 - y.x^2 + y(2xy) - y.y^2 = x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 =$
$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

### 6.4.5. Produto da soma pela diferença: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

O produto da soma de dois termos pela diferença dos mesmos termos é igual à diferença entre seus quadrados: $(x + y)(x - y) = x.x - x.y + y.x - y.y = x^2 - y^2$

### 6.4.6. Outros produtos notáveis

Os produtos notáveis já apresentados são os chamados de clássicos, que constam em qualquer livro de ensino fundamental. Entretanto, em concursos militares (foco de estudo desse livro) outros produtos notáveis costumam aparecer e serão trabalhados agora.

**6.4.6.1.** $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

Demonstração:

$(x + y + z)^2 = [(x + y) + z]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 =$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

**6.4.6.2.** $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Demonstração:

$(x + y)^4 = [(x + y)^2]^2 = (x^2 + 2xy + y^2)^2 = x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 =$

$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

**6.4.6.3.** $(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

Demonstração:

$(x - y)^4 = [(x - y)^2]^2 = (x^2 - 2xy + y^2)^2 = x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - 4x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3 =$

$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

**6.4.6.4.** $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$

Demonstração:

$(x + y)^5 = (x + y)(x + y)^4 = (x + y)(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) =$

$= x^5 + 4x^4y + 6x^3y^2 + 4x^2y^3 + xy^4 + x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + y^5 =$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$

**6.4.6.5.** $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 4xy^4 - y^5$

Demonstração:

$(x - y)^5 = [x + (-y)]^5 = x^5 + 5x^4(-y) + 10x^3(-y)^2 + 10x^2(-y)^3 + 4x(-y)^4 + (-y)^5 =$

$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 4xy^4 - y^5$

**6.4.6.6.** $(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

Demonstração:

$(x + y)^6 = (x + y)(x + y)^5 = (x + y)(x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 4xy^4 + y^5) =$

$= x^6 + 5x^5y + 10x^4y^2 + 10x^3y^3 + 4x^2y^4 + xy^5 + x^5y + 5x^4y^2 + 10x^3y^3 + 10x^2y^4 + 4xy^5 + y^6 =$

$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

**6.4.6.7.** $(x - y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

Demonstração:

Como $(x - y)^6 = [x + (-y)]^6$, basta inverter o sinal das parcelas em que o expoente de y é negativo $\Rightarrow$ $(x - y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

## Exercícios Resolvidos

**1)** (ITA-05) Sobre o número $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x \in ]0, 2[$ b) x é racional c) $\sqrt{2x}$ é irracional

d) $x^2$ é irracional e) $x \in ]2, 3[$

**Solução: Alternativa B**

A ideia é escrever $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ sob a forma $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, ou seja, $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Para tanto, eleva-se ao quadrado os dois lados da igualdade:

$7 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

Igualando as partes racionais e irracionais da última igualdade:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 4 \\ b = 3 \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

Logo: $x = (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \Rightarrow x = 2$

**2)** (CM BII-16) O valor da expressão $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ é:

a) um múltiplo de 3. b) um número irracional. c) um múltiplo de 5.

d) um quadrado perfeito. e) um número primo.

**Solução: Alternativa B**

Seja $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$. Elevando ao quadrado:

$$x^2 = \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 - 2\sqrt{3+2\sqrt{2}}.\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} + 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$x^2 = 6 - 2\sqrt{(3)^2 - (2\sqrt{2})^2} \Rightarrow x^2 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (perceba que o $x > 0$, pois é subtração de dois números, com o 1° maior que o 2°)

**3)** (Colégio Naval-86) Se $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$, $x > 0$, então $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é igual a

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

**Solução: Alternativa A**

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (\pm\sqrt{3})^3 \Rightarrow$$

$$x^3 + 3.x^2.\frac{1}{x} + 3.x.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \pm 3\sqrt{3} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} \pm 3\sqrt{3} = \pm 3\sqrt{3} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$$

**4)** (Colégio Naval-98) Sejam

$$x = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{1997} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{1997}}{2} \text{ e } y = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{1997} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{1997}}{\sqrt{3}},$$

o valor de $4x^2 - 3y^2$ é :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

**Solução: Alternativa D**

Se $a = (2+\sqrt{3})^{1997}$ e $b = (2-\sqrt{3})^{1997}$ então $2x = a + b$ e $\sqrt{3}y = a - b$.

Note agora que

$$(2+\sqrt{3})^{1997}(2-\sqrt{3})^{1997} = [(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^{1997} = [2^2 - (\sqrt{3})^2]^{1997} = (4-3)^{1997} = 1^{1997} = 1$$

Assim:

$$4x^2 - 3y^2 = (2x)^2 - (\sqrt{3}y)^2 = (2x+\sqrt{3}y)(2x-\sqrt{3}y) = (a+b+a-b)(a+b-a+b) = 4ab = 4$$

**5)** (ITA-05) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

**Solução:**

Fazendo $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ e $b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, então:

$a^3 = 2+\sqrt{5}$ e $b^3 = 2-\sqrt{5}$, lembrando que $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, pode-se escrever que $x^3 = 4 + 3x.\sqrt[3]{4-5} \Rightarrow x^3 = 4 - 3x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$

**6)** (ITA-07) Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos.

$$(x + a)^3 - (x + b)^3$$

Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a

a) 104 b) 114 c) 124 d) 134 e) 144

**Solução: Alternativa B**

$9x^2 - 63x + c = (x + a)^3 - (x - b)^3 = 3(a - b)x^2 + 3(a - b)(a + b)x + (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$

i) $3(a - b) = 9 \Rightarrow (a - b) = 3$

ii) $3(a - b)(a + b) = -63 \Rightarrow (a + b) = -7$

Resolvendo o sistema obtemos $a = -2$ e $b = -5$

iii) $c = (a - b)(a^2 + b^2 + ab) = (3)(4 + 25 + 10) = 117$

Portanto: $|a + |b| - c| = |-2 + 5 - 117| = 114$

**7)** (Olimpíada do Pará-05) Sejam x e y números reais tais que $x + y = 26$ e $x^3 + y^3 = 5408$. Calcule $x^2 + y^2$.

**Solução:**
Elevando x + y ao cubo obtém-se
$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
Por outro lado, sabe-se que $(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 2xy$
Assim: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)](x + y)/2 \Rightarrow$
$17576 = 5408 + 3(676 - P)(26)/2 \Rightarrow P = 364$

**8)** Determine um número natural n de modo que $2^8 + 2^{10} + 2^n$ seja um quadrado perfeito.
**Solução:**
$2^8 + 2^{10} + 2^n = (2^a + 2^b)^2 = 2^{2a} + 2.2^a.2^b + 2^{2b} = 2^{2a} + 2^{a+b+1} + 2^{2b}$
Fazendo a = 4 e b = 5 tem-se que n = a + b + 1 = 4 + 5 + 1 = 10
Desta maneira, $2^8 + 2^{10} + 2^{10}$ é quadrado perfeito, uma vez que
$$2^8 + 2^{10} + 2^{10} = (2^4 + 2^5)^2$$

**9)** Calcule o valor da expressão $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{2^{n}}+1)+1$.
**Solução:**
Sabe-se que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Desta forma:
$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{2^n}+1)+1 = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{2^n}+1)+1 =$
$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{2^n}+1)+1 = (2^4-1)(2^4+1)...(2^{2^n}+1)+1 =$
$= (2^8-1)(2^8+1)...(2^{2^n}+1)+1 = ... = (2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)+1 = \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 + 1 = 2^{2^{n+1}}$

**10)** Suponha que a e b sejam dois números reais tais $a^2 + b^2 + 8a - 14b + 65 = 0$. Calcule o valor de $a^2 + ab + b^2$.
**Solução:**
$a^2 + b^2 + 8a - 14b + 65 = 0 \Rightarrow (a^2 + 8a + 16) + (b^2 - 14b + 49) = 0 \Rightarrow$
$(a + 4)^2 + (b - 7)^2 = 0$
Como todo quadrado perfeito é maior ou igual a zero a única possibilidade é a = – 4 e b = 7.
Logo: $a^2 + ab + b^2 = (-4)^2 + (-4)(7) + 7^2 = 37$

**11)** Sejam a, b e c números reais tais que a – b = 2 e b – c = 4, determine o valor de $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$.
**Solução:**
Se a – b = 2 e b – c = 4 então a – c = 6
$X = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \Rightarrow 2X = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \Rightarrow$
$2X = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \Rightarrow$
$2X = 4 + 36 + 16 \Rightarrow X = 28$

**12)** Dado a + b + c + d = 0, prove que $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + bcd + cda + dab)$.

**Solução:**
Na 1ª expressão, passando c e d para o outro membro e depois elevando ao cubo obtém-se que:
$a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = -(c + d) \Rightarrow (a + b)^3 = -(c + d)^3 \Rightarrow$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 - 3c^2d - 3cd^2 - d^3 \Rightarrow$
$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3(a^2b + ab^2 + c^2d + cd^2) \Rightarrow$
$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3[ab(a + b) + cd(c + d)] \Rightarrow$
$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3[ab(-c - d) + cd(-a - b)] \Rightarrow$
$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + abd + acd + bcd)$

**13)** Demonstre que o produto de 4 inteiros consecutivos mais 1 é o quadrado perfeito de um inteiro.
**Solução:**
Desenvolvendo a expressão descrita no enunciado:
$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n^2 + 6n + 1 =$
$= (n^4 + 6n^3 + 9n^2) + (2n^2 + 6n) + 1 = n^2(n^2 + 6n + 9) + 2n(n + 3) + 1 =$
$= [n(n + 3)]^2 + 2[n(n + 3)] + 1 = [n(n + 3) + 1]^2 = (n^2 + 3n + 1)^2$

**4)** (Olimpíada da Estônia-15) Sejam x, y, z números reais tais que $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ e $xyz = 3$. Determine o valor de $x^3 + y^3 + z^3$.
**Solução:**
Elevando ao cubo a 1ª expressão:
$[(x + y) + z]^3 = 1 \Rightarrow (x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3 = 1 \Rightarrow$
$x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz = 1 \quad (1)$
Multiplicando a 1ª e a 2ª expressões: $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 11 \Rightarrow$
$x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 = 11 \overset{\times 3}{\Rightarrow}$
$3x^3 + 3y^3 + 3z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 = 33 \quad (2)$
Subtraindo as equações (2) e (1):
$2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 6xyz = 32 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 16 \Rightarrow$
$x^3 + y^3 + z^3 - 9 = 16 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 25$

**15)** Se a, b, c, $d > 0$ e $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, prove que $a = b = c = d$.
**Solução:**
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd =$
$= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (c^4 - 2c^2d^2 + d^4) + (2a^2b^2 + 2c^2d^2 - 4abcd) =$
$= (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$
Como todo quadrado perfeito é maior o igual a zero, a única possibilidade é:
i) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$
ii) $c^2 = d^2 \Rightarrow c = d$
iii) $ab = cd \Rightarrow a = b = c = d$

## 6.5. DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Dados dois polinômios P e H ≠ 0, se define a divisão de P por H da seguinte maneira: dividir P por H é equivalente a determinar dois outros polinômios Q e R de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

**I)** $P = Q.H + R$;

**II)** $\partial(R) < \partial(H)$.

Assim, na expressão $P = Q.H + R$, P recebe o nome de dividendo, H é o divisor, Q o quociente da divisão e R o resto da divisão. Por exemplo, como

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 - 5x + 6)(x + 4) + (15x - 25), \text{ e}$$
$$1 = \partial(15x - 25) < \partial(x^2 - 5x + 6) = 2,$$

pode-se afirmar que na divisão de $x^3 - x^2 + x - 1$ por $x^2 - 5x + 6$, tem-se como quociente $x + 4$ e resto $15x - 25$.

Entretanto, não é toda expressão da forma $P = Q.H + R$ que representa uma divisão polinomial. Na expressão $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 - 5x + 6)(x + 4) + (15x - 25)$ não se pode afirmar que se trata da divisão de $x^3 - x^2 + x - 1$ por $x + 4$ pois o grau do resto encontrado $(15x - 25)$ não é menor que o grau do divisor.

Quando ocorrer $R = 0$, afirma-se que <u>P é divisível por H</u> ou que <u>H divide P</u>. Por exemplo, $P = x^2 + 3x + 2$ é divisível por $x + 1$, pois existe $Q = x + 2$ de modo que $P = Q.H$.

## Exercícios Resolvidos

**1)** (Fatec/SP-02) O polinômio **f(x)** dividido por **ax + b**, com **a ≠ 0**, tem quociente **q(x)** e resto **r**. É verdade que o resto da divisão de **x.f(x)** por $x + \frac{b}{a}$ é:

a) $r^2$ b) $\frac{a}{b}r$ c) $\frac{b}{a}r$ d) $-\frac{b}{a}r$ e) $-\frac{a}{b}r$

**Solução: Alternativa D**

$f(x) = (ax + b)q(x) + r \Rightarrow x.f(x) = x(ax + b)q(x) + x.r$

Dividindo $x.f(x)$ por $x + b/a$: $x.(f) = (x + b/a)q'(x) + r' \Rightarrow$

$x(ax + b)q(x) + x.r = (x + b/a)q'(x) + r'$

Substituindo nesta última equação $x = -b/a$:

$$-\frac{b}{a}\cancel{\left[a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right]}^{0}.q\left(-\frac{b}{a}\right)+\left(-\frac{b}{a}\right)r=\cancel{\left(-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\right)}^{0}.q'\left(-\frac{b}{a}\right)+r' \Rightarrow r'=-\frac{b}{a}r$$

2) (Colégio Naval-90) Numa divisão polinomial, o dividendo, o divisor, o quociente e o resto são respectivamente: $4x^3 + ax^2 + 19x - 8$, $2x - b$, $2x^2 - 5x + 7$ e $-1$. A soma dos valores de a e b é igual a:

a) $-14$ b) $-13$ c) $-12$ d) $-11$ e) $-10$

**Solução: Alternativa D**

dividendo = divisor × quociente + resto $\Rightarrow$

$4x^3 + ax^2 + 19x - 8 = (2x - b)(2x^2 - 5x + 7) - 1 \Rightarrow$

$4x^3 + ax^2 + 19x - 8 = 4x^3 + (-2b - 10)x^2 + (5b + 14)x - 7b - 1$

Logo:

i) $5b + 14 = 19 \Rightarrow 5b = 5 \Rightarrow b = 1$

ii) $a = -2b - 10 = -2 - 10 = -12$

Desta maneira: $a + b = -12 + 1 = -11$

### 6.5.1. Divisão de um monômio por outro monômio

O resultado da divisão de um monômio P por outro H é igual a um monômio cujo coeficiente é igual à razão dos coeficientes de P e H e cuja parte literal é igual à razão entre as partes literais de P e H. Por exemplo, para dividir o monômio $P = 24x^3y^4z^5$ pelo monômio $H = -6x^2z^6w^3$, deve-se fazer:

$$\frac{P}{H} = \frac{24x^3y^4z^5}{-6x^2z^6w^3} = \frac{24}{-6}\left(\frac{x^3}{x^2}y^4\frac{z^5}{z^6}\frac{1}{w^3}\right) = -4xy^4z^{-1}w^{-3}$$

#### 6.5.1.1. Condições de divisibilidade

Um monômio é divisível por outro quando o resultado desta divisão é um monômio que apresenta todos os expoentes das suas variáveis sendo números naturais. Por exemplo, o monômio $15x^4y^7z^5$ é divisível pelo monômio $-3x^2y^3z^5$ uma vez que $\frac{15x^4y^7z^5}{-3x^2y^3z^5} = \frac{15}{-3}x^{4-2}y^{7-3}z^{5-5} = -5x^2y^4$.

#### 6.5.1.2. Grau do quociente

O grau do quociente da divisão de um monômio por outro é igual à diferença entre o grau do dividendo e o grau do divisor, ou seja, se $H = P/Q$ então

$$\partial H = \partial P - \partial Q.$$

A demonstração é bastante semelhante à regra do grau da multiplicação de dois polinômios e fica a cargo do leitor.

## Exercícios Resolvidos

**1)** (AFA-03) Analise as proposições abaixo, classificando-as em V (verdadeiro) ou F (falso):

( ) Se $p(x) = 2x^3 - (p-1)x + 4$ e $m(x) = qx^3 + 2 + q$ são polinômios idênticos, então $p^2 + q^2 = 5$.

( ) Dividindo-se $A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ por $B(x)$, obtém-se o quociente $C(x) = 1 + x$ e resto $R(x) = C(x)$. Pode-se afirmar que $B(x)$ é tal que $B(0) = 0$.

( ) Se f, g e h são polinômios de grau m, n e q (m, n, q são naturais e $m > n > q$), então o grau de $(f + g).h$ é dado por $m + q$.

A sequência correta é:

a) F – V – V b) V – V – F c) V – F – V d) V – V – V

**Solução: Alternativa D**

i) Verdadeira: Igualando os coeficientes de mesmo grau:

$q = 2$ e $p = 1 \Rightarrow p^2 + q^2 = 5$

ii) Verdadeira: $A(x) = B(x).C(x) + C(x) \Rightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = B(x)(1 + x) + 1 + x \Rightarrow$
$x^3 + x^2 = B(x)(1 + x) \Rightarrow B(x) = x^2 \Rightarrow B(0) = 0$

iii) Verdadeira: Como $m > n > q$ então o grau de $(f + g)$ é m, fazendo com que o grau de $(f + g).h$ seja igual a $m + q$.

**2)** (Colégio Naval-81) Sendo b e c números inteiros, o grau do polinômio que representa o quociente

$$\frac{\left(x^3 - Bx^2 + 3x - 1\right)^4 . \left(x^2 - 7x\right)^2}{\left(x^2 + Cx - 3\right)^3 + \left(x^2 - 3\right)^4} \text{ é :}$$

a) 1° b) 6° c) 4° d) 8° e) 2°

**Solução: Alternativa D**

Como $\partial(x^3 - Bx^2 + 3x - 1) = 3$ então $\partial[(x^3 - Bx^2 + 3x - 1)^4] = 3.4 = 12$

Analogamente: $\partial(x^2 - 7x) = 2 \Rightarrow \partial[(x^2 - 7x)^2] = 2.2 = 4$

Assim: $\partial[(x^3 - Bx^2 + 3x - 1)^4(x^2 - 7x)^2] = \partial[(x^3 - Bx^2 + 3x - 1)^4] + \partial[(x^2 - 7x)^2] =$
$= 12 + 4 = 16$

Por outro lado, $(x^2 + Cx - 3)^3$ e $(x^2 - 3)^4$ possuem grau 8 e quando as duas expressões são somadas os termos de expoente 8 em cada expressão não são cancelados, ou seja: $\partial[(x^2 + Cx - 3)^3 + (x^2 - 3)^4] = 8$

Desta forma, o grau do quociente é igual a subtração dos graus do numerador e denominador: $\partial q = 16 - 8 = 8$

### 6.5.2. Divisão de um polinômio por um monômio

Para dividir um polinômio por um monômio deve-se dividir cada termo do polinômio pelo monômio e depois somar os termos obtidos. Por exemplo, para dividir o polinômio $-24x^2y^3z + 8xy^5z^3 + 10x^3y^7z^4$ pelo monômio $2xyz^2$ basta fazer:

$$\frac{-24x^2y^3z+8xyz^3+10x^3y^7z^4}{2xyz^2} = \frac{-24x^2y^3z}{2xyz^2} + \frac{8xyz^3}{2xyz^2} + \frac{10x^3y^7z^4}{2xyz^2} = -12xy^2z^{-1} + 4z + 5x^2y^6z^2$$

Neste último exemplo o grau do polinômio no numerador é 14 e o grau do polinômio no denominador é 4. Note que o grau do resultado da divisão é 10, conferindo a expressão $\partial H = \partial P - \partial Q$.

#### 6.5.2.1. Condições de divisibilidade

Um polinômio é divisível por um monômio quando o resultado desta divisão é um polinômio que apresenta todos os expoentes das suas variáveis em cada um dos termos como sendo números naturais. Por exemplo, o polinômio $15x^4y^7z^5 - 9x^2y^3z^5 - 6x^3y^6z^8$ é divisível pelo monômio $-3x^2y^3z^5$ uma vez que

$$\frac{15x^4y^7z^5-9x^2y^3z^5-6x^3y^6z^8}{-3x^2y^3z^5} = \frac{15x^4y^7z^5}{-3x^2y^3z^5} + \frac{-9x^2y^3z^5}{-3x^2y^3z^5} + \frac{-6x^3y^6z^8}{-3x^2y^3z^5} = -5x^2y^4 + 3 + 2xy^3z^3.$$

Por outro lado, basta que um dos expoentes seja um número não natural que não ocorre a divisibilidade. Por exemplo, na divisão

$$\frac{-6x^3y^2z^8+8x^6y^4z^7-4x^5y^3z^5}{-2x^3y^3z^4} = \frac{-6x^3y^2z^8}{-2x^3y^3z^4} + \frac{8x^6y^4z^7}{-2x^3y^3z^4} + \frac{-4x^5y^3z^5}{-2x^3y^3z^4} =$$

$$= 3y^{-1}z^4 - 4x^3yz^3 + 2x^2z$$

o termo $3y^{-1}z^4$ faz com que não ocorra a divisiblidade.

### 6.5.3 Divisão entre polinômios de uma variável

Em seguida serão apresentados alguns métodos de divisão de dois polinômios. Todos os métodos serão demonstrados para o caso de dividendo e divisor sendo polinômios de uma variável. É possível generalizar estes métodos de divisão polinomial para polinômios com uma quantidade aleatória de incógnitas, mas isto foge completamente dos objetivos desta obra.

### 6.5.3.1. Método de Descartes (Método dos Coeficientes a Determinar)

O método de Descartes baseia-se em três fatos, descritos abaixo:

I) Baseando-se no fato de que $\partial q = \partial p - \partial h$ e $\partial r < \partial h$ determina-se $\partial q$ e $\partial r$;

II) Constroem-se os polinômios $q$ e $r$, deixando incógnitos os seus coeficientes ;

III) Determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $p = q.h + r$.

Na verdade, nada garante que o grau de r(x) seja igual a $\partial$(h) – 1. A única certeza que temos é que $\partial$r é um número natural menor que $\partial$h. Porém, pode-se escrever r supondo possuir grau igual a $\partial$(h) – 1 e caso $\partial$r seja menor que $\partial$(h) – 1 encontraremos os coeficientes das parcelas com maiores expoentes de x iguais a zero.

Por exemplo, na determinação do quociente e do resto da divisão p(x) por h(x), onde $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ e $h(x) = x^2 + 3x - 2$, pode-se proceder da seguinte maneira:

Pela definição $p(x) = q(x).h(x) + r(x)$, então $\partial q = \partial p - \partial h = 4 - 2 = 2 \Rightarrow$

$q(x) = ax^2 + bx + c$

$\partial r < \partial h \Rightarrow \partial r < 2 \Rightarrow$ o valor máximo para o grau de h(x) é 1 $\Rightarrow h(x) = dx + e$

Então: $x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = (ax^2 + bx + c)(x^2 + 3x - 2) + (dx + e) \Rightarrow$

$x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = ax^4 + (b + 3a)x^3 + (c + 3b - 2a)x^2 + (3c - 2b + d)x + (-2c + e)$

De onde tiramos o sistema:

$a = 1$

$b + 3a = 1 \Rightarrow b = -2$

$c + 3b - 2a = -7 \Rightarrow c = 1$

$3c - 2b + d = 9 \Rightarrow d = 2$

$-2c + e = -1 \Rightarrow e = 1$

Portanto: $q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $r(x) = 2x + 1$

## Exercícios Resolvidos

**1)** (Escola Naval-90) $x^4 + rx^2 + s$ será divisível por $x^2 + 4x + 6$ só se $r + s$ for igual a:
a) 10 b) 15 c) 16 d) 24 e) 32

**Solução: Alternativa E**

Desde que o grau do dividendo é 4 e o grau do divisor é 2, então o grau do quociente é 2. Assim, a forma geral do quociente é $q(x) = ax^2 + bx + c$:

$x^4 + rx^2 + s = (x^2 + 4x + 6)(ax^2 + bx + c) =$

$= ax^4 + (4a + b)x^3 + (6a + 4b + c)x^2 + (6b + 4c)x + 6c$

Assim, igualando os coeficientes dos termos de mesmo expoente em x:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 0 \\ 6a + 4b + c = r \\ 6b + 4c = 0 \\ 6c = s \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª: $4.1 + b = 0 \Rightarrow b = -4$

Substituindo o valor de b na 4ª equação: $6(-4) + 4c = 0 \Rightarrow c = 6$

Assim: $r = 6a + 4b + c = 6(1) + 4(-4) + 6 = -4$ e $s = 6c = 6(6) = 36$

Portanto: $r + s = -4 + 36 = 32$

**2)** (AFA-95) O resto da divisão de $x^3 + px + q$ por $x^2 - x - 2$ é $2x - 1$. Então, o valor de $p^2 + q^2$ é:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

**Solução: Alternativa C**

Como o grau do dividendo é 3 e o grau do divisor é 2, então o grau do quociente é 1, ou seja, sua forma geral é $q(x) = ax + b$:

$x^3 + px + q = (x^2 - x - 2)(ax + b) + 2x - 1 =$

$= ax^3 + (-a + b)x^2 + (-2a - b)x - 2b + 2x - 1 \Rightarrow$

$x^3 + px + q = ax^3 + (-a + b)x^2 + (-2a - b + 2)x - 2b - 1$

Portanto, pode-se montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 0 \\ -2a + b + 2 = p \\ -2b - 1 = q \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª: $-1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$

Substituindo os valores calculados de a e b nas outras equações:

$p = -2a + b + 2 = -2(1) + 1 + 2 = 1$; $q = -2b - 1 = -2(1) - 1 = -3$

Portanto: $p^2 + q^2 = 1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$

**6.5.3.2. Método da Chave:**

Suponha que na divisão de p por h temos um resto r e quociente q. O Método da Chave consiste em encontrar expressões algébricas semelhantes à $r = p - h.q$ da forma $r_n = r_{n-1} - h.q_n$, onde cada $r_n$ ($r_0 = p$) é denominado de resto parcial e $q_n$ é um monômio escolhido de modo que o grau de $r_n$ seja menor que o grau de $r_{n-1}$. Estas operações são realizadas até que se obtenha uma expressão em que $\partial r_n < \partial h$. Neste momento temos as seguintes expressões algébricas:

$r_1 = p - h.q_1$
$r_2 = r_1 - h.q_2$
$r_3 = r_2 - h.q_3$
...
$r_n = r_{n-1} - h.q_n$

Ao somarmos todas as expressões obtemos $p = h(q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n) + r_n$. Nesta equação, que representa a divisão de p por h, o quociente é igual a $q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n$ e o resto é $r_n$.

Por exemplo, vamos aplicar este método para dividir $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1$ por $h(x) = x^2 + 3x - 2$. Inicialmente observamos que o monômio $q_1(x)$ que deve ser multiplicado a $h(x)$ de modo que $r_0(x) - q_1(x).h(x)$ possua grau menor que $p(x)$ é $q_1(x) = x^2$, uma vez que

$$r_1(x) = r_0(x) - q_1(x).h(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1 - (x^2)(x^2 + 3x - 2) \Rightarrow$$
$$r_1(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1 - x^4 - 3x^3 + 2x^2 \Rightarrow r_1(x) = -2x^3 - 5x^2 + 9x + 1$$

Notemos agora que o monômio $q_2(x)$ que faz com que o grau de $r_2 = r_1 - h.q_2$ seja menor que o grau de $r_1$ é $q_2(x) = -2x$, pois

$$r_2(x) = -2x^3 - 5x^2 + 9x + 1 - (-2x)(x^2 + 3x - 2) \Rightarrow$$
$$r_2(x) = -2x^3 - 5x^2 + 9x + 1 + 2x^3 + 6x^2 - 4x \Rightarrow r_2(x) = x^2 + 5x + 1$$

Uma rápida análise nos leva a concluir que $q_3(x) = 1$, desde que:

$$r_3(x) = x^2 + 5x + 1 - (1)(x^2 + 3x - 2) = x^2 + 5x + 1 - x^2 - 3x + 2 \Rightarrow r_3(x) = 2x + 3$$

Como $\partial r_3 < \partial h$ paramos por aqui as operações. Note que:

$r_1(x) = p(x) - q_1(x).h(x)$
$r_2(x) = r_1(x) - q_2(x).h(x)$
$r_3(x) = r_2(x) - q_3(x).h(x)$

Somando estas equações obtemos:

$$r_3(x) = p(x) - [q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)].h(x) \Rightarrow$$
$$p(x) = [q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)]h(x) + r_3(x) \Rightarrow$$
$$x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x - 2) + 2x + 3,$$

que é a expressão da divisão de $p(x)$ por $h(x)$, ou seja:

$$q(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ e } r(x) = 2x + 2.$$

Entretanto pode-se montar um esquema semelhante à divisão de números inteiros para tornar este método mais sucinto. O dividendo p, o divisor h, o

quociente q e o resto r ocupam os mesmos espaços dos números que levam estas denominações na divisão de inteiros. A cada operação escolhe-se um monômio no espaço destinado ao quociente de modo que a multiplicação deste monômio com h forneça um polinômio que subtraído de $r_n$ o grau deste diminua. O exemplo anterior de divisão será agora representado usando a chave que caracteriza a divisão de inteiros.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1 & x^2 + 3x - 2 \\
\cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 1 \rightarrow \text{quociente: } q(x) \\
\cline{1-1}
\quad - 2x^3 - 5x^2 + 9x + 1 & \\
\quad + 2x^3 + 6x^2 - 4x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad x^2 + 5x + 1 & \\
\qquad - x^2 - 3x + 2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 2x + 3 & \longrightarrow \text{resto: } r(x)
\end{array}
$$

Verifica-se que: $x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x - 2) + (2x + 1)$

Perceba que são seguidos os mesmos passos e obtidas as mesmas equações do método de escrever seguidamente $r_n = r_{n-1} - h.q_n$, porém claramente este esquema em chave torna o algoritmo da divisão mais elegante e sucinto.

## Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-87) O resto da divisão de $(x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 9x - 8)$ por $(x^2 + x - 3)$ é:

a) independente de x e não nulo

b) positivo para $x < \frac{5}{2}$

c) nulo

d) par, para $x \in N$

e) igual a 21, para x = 13

**Solução: Alternativa E**

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 9x - 8 & x^2 + x - 3 \\
\cline{2-2}
-x^5 - x^4 + 3x^3 & x^3 - 2x + 1 \\
\cline{1-1}
\quad - 2x^3 - x^2 + 9x - 8 & \\
\quad\; 2x^3 + 2x^2 - 6x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad x^2 + 3x - 8 & \\
\qquad - x^2 - x + 3 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 2x - 5 &
\end{array}
$$

Analisando todas as alternativas, verifica-se que a única correta é a letra E.

**2)** (EPCAr-01) Se $Q(x) = x^3 - x^2 + mx + n$, $P(x) = x^2 + x - 2$ e $Q(x)$ é divisível por $P(x)$, então:

a) $\frac{m}{n} = 1$ b) $m - n = 2m$ c) $mn = m^2$ d) $m^2 - n^2 \neq 0$

**Solução: Alternativa B**

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^3 & - x^2 & + mx & + n & & x^2 + x - 2 \\ \cline{6-6} -x^3 & - x^2 & + 2x & & & x - 2 \\ \cline{1-3} & -2x^2 & + (m+2)x & + n & & \\ & 2x^2 & + 2x & - 4 & & \\ \cline{2-4} & & (m+4)x & + n - 4 & & \end{array}$$

Uma vez que o enunciado afirma que $Q(x)$ é divisível por $P(x)$, então o resto desta divisão deve ser igual a zero:

i) $m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4$

ii) $n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4$

Verificando cada alternativa:

a) $\frac{m}{n} = \frac{-4}{4} = -1$

b) $m - n = -4 - 4 = -8 = 2m$

c) $mn = (-4)(4) = -16 = -m^2$

d) $m^2 - n^2 = (-4)^2 - 4^2 = 16 - 16 = 0$

Desta forma, a única alternativa correta é a B

**6.5.3.3. Teorema do Resto**

**Definição:** O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $p$ em $a$.

**Demonstração:**

De acordo com a definição de divisão, a divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ pode ser escrita da seguinte forma: $p(x) = q(x).(x - a) + r(x)$

Como o grau de $x - a$ é um, $r(x)$ é nulo ou possui grau zero, portanto $r(x)$ é um polinômio constante.

Aplicando em x o valor $a$ temos: $p(a) = q(a).(a - a) + r(a) \Rightarrow r = p(a)$

Por exemplo, para determinar o resto da divisão de $p(x) = 3x^5 + x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 8$ por $x - 1$ basta calcular o valor de $p(1) = 3.1^5 + 1^4 - 3.1^3 - 7.1^2 + 8 = 2$.

**6.5.3.4. Teorema de D'Alembert:**

**Definição:** Um polinômio $p$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $a$ é raiz de $p$.

**Demonstração:**

De acordo com o teorema do resto, na divisão de $p$ por $x - a$ temos $r = p(a)$.

Logo, $p(x)$ é divisível por $x - a \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow p(a) = 0 \Leftrightarrow a$ é raiz de p.

Por exemplo, na determinação do valor de m de forma que o polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 2$ seja divisível por $x - 2$ deve-se observar que $x = 2$ é raiz de $p(x)$, logo: $p(2) = 0 \Rightarrow 2.8 + 5.4 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = 19$

**6.5.3.5. Teorema:** Se um polinômio $p(x)$ é divisível, separadamente, por $x - a$ e $x - b$, com $a \neq b$, então $p(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

**Demonstração:**

Se $p(x)$ é divisível por $a$ e $b$ $(a \neq b)$ então $p(a) = 0$ e $p(b) = 0$

Na divisão de $p(x)$ por $(x - a)(x - b)$ o grau do resto é um, então $r(x) = cx + d$

$p(x) = q(x)(x - a)(x - b) + cx + d$

Aplicando $x = a$ temos: $p(a) = q(a)(a - a)(b - a) + ca + d \Rightarrow ca + d = 0$

Aplicando $x = b$ temos: $p(b) = q(b)(a - b)(b - b) + cb + d \Rightarrow cb + d = 0$

Então $c = 0$ e $d = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

Por exemplo, suponha que o polinômio $p(x) = x^2 + ax + b$ é divisível por $x - 1$ e por $x - 2$. Assim, tem-se que $p(x)$ é divisível por $h(x) = (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$. Como o grau de p é igual ao grau de h, então de modo que p seja divisível por h deve-se ter $p(x) = k.h(x)$, onde k é um número complexo.

Logo: $x^2 + ax + b = kx^2 - 3kx + 2k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a = -3$ e $b = 2$

**6.5.3.6. Teorema:** Se p(x) é divisível por (x – a)(x – b) então p(x) é divisível separadamente por (x – a) e por (x – b).

**Demonstração:**

Como p(x) é divisível por (x – a)(x – b) então existe um polinômio q(x), não identicamente nulo, de modo que p(x) = (x – a)(x – b)q(x). Aplicando x = a obtemos p(a) = 0, ou seja, p(x) é divisível por x – a. Analogamente, aplicando x = b obtemos p(b) = 0, fazendo com que p(x) seja divisível por x – b.

Por exemplo, suponha que é afirmado que o polinômio $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + ax + b$ seja divisível por $h(x) = x^2 - 1$. Uma vez que $h(x) = (x - 1)(x + 1)$ então deve-se impor que x – 1 e x + 1 dividem p(x):

i) x – 1 divide p(x) $\Rightarrow$ $p(1) = 0 \Rightarrow 2.1^3 - 6.1^2 + a.1 + b = 0 \Rightarrow a + b = 4$

ii) x + 1 divide p(x) $\Rightarrow$ $p(-1) = 0 \Rightarrow 2.(-1)^3 - 6(-1)^2 + a(-1) + b = 0 \Rightarrow -a + b = 8$

Resolvendo o sistema formado encontra-se que a = – 2 e b = 6

**6.5.3.7. Teorema:** O polinômio $p(x) = x^n - a^n$ é divisível por h(x) = x – a e o resto desta divisão é $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1}$.

**Demonstração:**

Pelo teorema do resto: $r = p(a) = a^n - a^n = 0 \Rightarrow$ p é divisível por h

Determinação do quociente pelo método da chave:

$$
\begin{array}{r|l}
x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + 0.x^{n-3} + \ ... \ + 0.x - a^n & x - a \\
\underline{-x^n + a.x^{n-1}} & \\
a.x^{n-1} + 0.x^{n-2} & \\
\underline{-a.x^{n-1} + a^2.x^{n-2}} & \\
a^2.x^{n-2} + 0.x^{n-3} & \\
\underline{-a^2.x^{n-2} + a^3.x^{n-3}} & \\
a^3.x^{n-3} + 0.x^{n-4} & \\
\ ... & \\
a^{n-2}x^2 + 0.x & \\
\underline{-a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x} & \\
a^{n-1}.x - a^n & \\
\underline{-a^{n-1}.x + a^n} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ x^{n-1} + a.x^{n-2} + a^2.x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1}
\end{array}
$$

Logo, pode-se escrever que:

$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1})$

**6.5.3.8. Teorema:** Se n é número ímpar então polinômio $p(x) = x^n + a^n$ é divisível por h(x) = x + a e o resto desta divisão é $q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + ... - a^{n-2}x + a^{n-1}$.

**Demonstração:**

Pelo teorema do resto: $r = p(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0 \Rightarrow$ p é divisível por h

Determinação do quociente pelo método da chave:

$$
\begin{array}{r|l}
x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + 0.x^{n-3} + \ \ldots\ + 0.x + a^n & x + a \\
\underline{-x^n - a.x^{n-1}} & \\
-a.x^{n-1} + 0.x^{n-2} & \\
\underline{a.x^{n-1} + a^2.x^{n-2}} & \\
a^2.x^{n-2} + 0.x^{n-3} & \\
\underline{-a^2.x^{n-2} - a^3.x^{n-3}} & \\
-a^3.x^{n-3} + 0.x^{n-4} & \\
\ldots & \\
-a^{n-2}x^2 + 0.x & \\
\underline{a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x} & \\
a^{n-1}.x + a^n & \\
\underline{-a^{n-1}.x - a^n} & \\
0 &
\end{array}
$$

Portanto, sendo n um número natural ímpar, pode-se escrever que:
$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots - a^{n-2}x + a^{n-1})$

**6.5.3.9. Teorema:** Se n é número par então polinômio $p(x) = x^n - a^n$ é divisível por $h(x) = x + a$ e o resto desta divisão é

$$q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1}.$$

**Demonstração:**
Pelo teorema do resto: $r = p(-a) = (-a)^n - a^n = a^n - a^n = 0 \Rightarrow$ p é divisível por h
Determinação do quociente pelo método da chave:

$$
\begin{array}{r|l}
x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + 0.x^{n-3} + \ \ldots\ + 0.x - a^n & x + a \\
\underline{-x^n - a.x^{n-1}} & \\
-a.x^{n-1} + 0.x^{n-2} & \\
\underline{a.x^{n-1} + a^2.x^{n-2}} & \\
a^2.x^{n-2} + 0.x^{n-3} & \\
\underline{-a^2.x^{n-2} - a^3.x^{n-3}} & \\
-a^3.x^{n-3} + 0.x^{n-4} & \\
\ldots & \\
a^{n-2}x^2 + 0.x & \\
\underline{-a^{n-2}x^2 - a^{n-1}x} & \\
-a^{n-1}.x - a^n & \\
\underline{a^{n-1}.x + a^n} & \\
0 &
\end{array}
$$

Portanto, sendo n um número natural par, pode-se escrever que:
$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1})$

## Exercícios Resolvidos

1) (EPCAr-02) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $x + 1$ é um número

a) ímpar menor que 5 b) par menor que 6

c) primo maior que 5 d) primo menor que 7

**Solução: Alternativa C**

Pelo teorema do resto:

$r = p(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$

2) (ITA-03) Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) $-6$ b) $-4$ c) 4 d) 7 e) 9

**Solução: Alternativa E**

Pelo teorema do resto

$P(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b + c + 1 = 2 \Rightarrow a + b + c = 0$

$P(-1) = 3 \Rightarrow -1 + a + b - c + 1 = a + b - c = 3$

$P(2) = 0 \Rightarrow 32 + 16a + 4b + 2c + 1 = 0$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b - c = 3 \\ 16a + 4b + 2c = -33 \end{cases}$$

Resolvendo, teremos: $a = -3$, $b = \frac{9}{2}$ e $c = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{-3\frac{7}{2}}{-\frac{3}{2}} = 9$

3) (UFSC-00) Um polinômio $P(x)$ dividido por $(x + 1)$ dá resto 3 e por $(x - 2)$ dá resto 6. O resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(x + 1).(x - 2)$ é da forma $ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O valor numérico da expressão **a + b** é:

**Solução:**

Pelo Teorema do Resto $P(-1) = 3$ e $P(2) = 6$.

A expressão da divisão de $P(x)$ por $(x+1).(x-2)$ é:

$P(x) = Q(x)(x + 1)(x - 2) + ax + b$

i) $x = -1 \Rightarrow P(-1) = Q(-1)(-1 + 1)(-1 - 2) + a(-1) + b \Rightarrow -a + b = 3$

ii) $x = 2 \Rightarrow P(2) = Q(2)(2 + 1)(2 - 2) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = 6$

Resolvendo o sistema obtemos $a = 1$ e $b = 4 \Rightarrow a + b = 5$

4) (Colégio Naval-83) O polinômio $x^3 + px^2 + x + q$ é divisível por $x + 1$. Logo $p + q$ é igual a:

a) 2 b) 1 c) 0 d) – 1 e) – 2

**Solução: Alternativa A**

Se $h(x) = x^3 + px^2 + x + q$ é divisível por $x + 1$, pelo teorema de D'Alembert:

$h(-1) = 0$: $(-1)^3 + p(-1)^2 + (-1) + q = 0 \Rightarrow -1 + p - 1 + q = 0 \Rightarrow p + q = 2$

5) (ITA-82) Sabendo-se que o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 2$ é divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 2)$, podemos afirmar que

a) $a$ e $b$ tem sinais opostos e são inteiros

b) $a$ e $b$ tem o mesmo sinal e são inteiros

c) $a$ e $b$ tem sinais opostos e são racionais não inteiros

d) $a$ e $b$ tem o mesmo sinal e são racionais não inteiros

e) somente $a$ é inteiro

**Solução: Alternativa C**

Se $P(x)$ é divisível por $x + 1$ então $-1$ é raiz de $P(x)$, ou seja, $P(-1) = 0$:

$a(-1)^3 + b(-1)^2 + 2(-1) - 2 = 0 \Rightarrow -a + b - 2 - 2 = 0 \Rightarrow -a + b = 4$

Se $P(x)$ é divisível por $x - 2$ então 2 é raiz de $P(x)$, ou seja, $P(2) = 0$:

$a(2)^3 + b(2)^2 + 2(2) - 2 = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 4 - 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -1$

Logo, pode-se montar o sistema: $\begin{cases} -a + b = 4 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases}$

Multiplicando a 1ª equação por – 2: $\begin{cases} 2a - 2b = -8 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases}$

Somando as duas equações: $6a = -9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

Substituindo na 1ª equação: $b = a + 4 = -\frac{3}{2} + 4 \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

Portanto, a alternativa correta é a C.

6) (IME-01) Determine todos os números inteiros $m$ e $n$ para os quais o polinômio $P(x) = 2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

**Solução:**

Calculando $P(-a)$ obtemos: $P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m$

i) m par e n par: $P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = 2a^m + a^{3n}.a^{m-3n} - a^m =$
$= 2a^m + a^m - a^m = 2a^m$

ii) m ímpar e n ímpar:
$P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = -2a^m + a^{3n}.a^{m-3n} - a^m = -2a^m$

iii) m ímpar e n par:
$P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = -2a^m - a^{3n}.a^{m-3n} - a^m = -3a^m$

iv) m par e n ímpar: $P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = 2a^m - a^{3n}.a^{m-3n} - a^m = 0$

Logo, $P(x)$ é divisível por $x + a$ se e somente se $m$ é par e $n$ é ímpar.

7) (OBM-16) Seja $r$ uma raiz da equação $x^2 - 12x - 12 = 0$. Sabe-se que $r$ também é raiz da equação $x^4 - ax^3 - b = 0$, sendo $a$ e $b$ racionais positivos. Calcule $a + b$.

**Solução:**

Se toda raiz de $x^2 - 12x - 12 = 0$ também é raiz de $x^4 - ax^3 - b = 0$, então o polinômio $h(x) = x^2 - 12x - 12$ divide $p(x) = x^4 - ax^3 - b = 0$.

Pelo método da chave:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l} x^4 & - & ax^3 & + & 0x^2 & - & 0x & - & b & x^2 - 12x - 12 \\ \cline{10-10} -x^4 & + & 12x^3 & + & 12x^2 & & & & & x^2 + (12 - a)x + k \\ \cline{1-5} & & (12-a)x^3 & + & 12x^2 & - & 0x & - & b & \\ & & -(12-a)x^3 & & +(144-12a)x^2 & + & (144-12a)x & & & \\ \cline{3-8} & & & & (156-12a)x^2 & + & (144-12a)x & - & b & \end{array}$$

O próximo passo do método da chave é fazer $k = 156 - 12a = 12(13 - a)$ e depois impor que:

$$12(13 - a)x^2 + 12(12 - a)x - b = 12(13 - a)(x^2 - 12x - 12)$$

Assim:

i) $12(12 - a) = 12(13 - a)(-12) \Rightarrow 12 - a = -156 + 12a \Rightarrow a = \dfrac{168}{13}$

ii) $-b = -144(13 - a) \Rightarrow b = \dfrac{144}{13}$

Logo: $a + b = \dfrac{168 + 144}{13} = 24$.

## 6.6. FATORAÇÃO

A fatoração polinomial consiste em decompor um polinômio como multiplicação de dois ou mais polinômios. Os principais métodos de fatoração polinomial serão discutidos em seguida.

### 6.6.1. Elemento comum em evidência

Colocar um fator comum em evidência é transformar um polinômio em um produto de dois fatores, um dos quais é o que se deseja colocar em evidência e o outro é o quociente da divisão do polinômio pelo primeiro fator. Como se trata de divisão polinomial, divide-se cada termo do polinômio pelo fator a ser colocado em evidência. A principal estratégia é observar as variáveis que aparecem em todos os termos do polinômio e tirar em evidência um termo composto por estas variáveis elevadas aos menores expoentes encontrados para cada variável. Por exemplo, no polinômio $3x^4y^5z^2 - 8x^6y^2z^4 + 9x^4y^4z^5$, pode-se observar que os menores expoentes de x, y e z são, respectivamente, 4, 2 e 2. Assim, pode-se tirar em evidência o termo $x^4y^2z^2$: $3x^4y^5z^2 - 8x^6y^2z^4 + 9x^4y^4z^5 = x^4y^2z^2(3y^3 - 8x^2z^2 + 9y^2z^3)$

### 6.6.2. Fatoração utilizando o produto da soma pela diferença

Quando se pode separar o polinômio na forma da subtração de duas expressões que sejam quadrados perfeitos, é possível fatorar tal polinômio utilizando o produto notável $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.

Observe os exemplos seguintes:

i) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

ii) $a^4 + b^4 + a^2b^2 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 =$
$= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$

iii) $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$
$= (2ab)^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 =$
$= (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = [c^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - c^2] =$
$= (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)$

### 6.6.3. Fatoração por grupamento

Este método de fatoração polinomial consiste em formar grupamentos de dois os mais termos do polinômio de modo que seja possível tirar em evidência uma mesma expressão algébrica de cada um dos termos. Como exemplo, observe a fatoração seguinte:

$4x^4 - x^3 + 2x - 1 = (4x^4 - x^3) + (2x - 1) = x^3(4x^2 - 1) + (2x - 1) =$
$= x^3(2x - 1)(2x + 1) + (2x - 1) = (2x - 1)[x^3(2x + 1) + 1] = (2x - 1)(2x^3 + x^2 + 1)$

Este método também pode ser utilizado na fatoração de $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$:

$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x^4 - x^3 + x^2) + 3(x^3 - x^2 + x) + (x^2 - x + 1) =$
$= x^2(x^2 - x + 1) + 3x(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)$

### 6.6.4. Fatoração pela divisão por $x \pm a$

No tópico de divisão polinomial foram vistas três identidades polinomiais que podem ser utilizadas na fatoração de polinômios:

$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1}),\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + ... - a^{n-2}x + a^{n-1}),\ n$ ímpar

$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + ... + a^{n-2}x - a^{n-1}),\ n$ par

Em particular, duas destas fatorações são tão largamente utilizadas em várias áreas da matemática (fatoração polinomial, trigonometria, aritmética, etc), que serão destacadas abaixo:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Por exemplo, pode-se utilizar a primeira destas fatorações, no caso de $n = 5$, de modo a fatorar a expressão $32x^5 - y^{10}$. Para $n = 5$ a primeira identidade fica da forma $u^5 - v^5 = (u - v)(u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4)$. Fazendo $u = 2x$ e $v = y^2$ pode-se fazer:

$$32x^5 - y^{10} = (2x - y^2)(16x^4 + 8x^3y^2 + 4x^2y^4 + 2xy^6 + y^8)$$

Pode-se utilizar a segunda identidade, para $n = 3$, para fatorar o polinômio $27x^6y^6 + 8a^6b^6$. Desta forma, sabendo que $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ e fazendo $u = 3x^2y^2$ e $v = 2a^2b^2$:

$$27x^6y^6 + 8a^6b^6 = (3x^2y^2 + 2a^2b^2)(9x^4y^4 - 6x^2y^2a^2b^2 + 4a^4b^4)$$

### 6.6.5. Identificação de uma raiz

No caso de um polinômio de uma variável é possível fatorar este polinômio caso alguma de suas raízes seja identificada. Por exemplo, é possível observar que o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ possui o número 1 como raiz, uma vez que $p(1) = 1^3 - 4.1^2 + 2.1 + 1 = 0$. Desta forma, $p(x)$ é divisível por $x - 1$ e utilizando qualquer um dos métodos de divisão descritos neste capítulo tem-se que:

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = (x - 1)(x^2 - 3x - 1)$$

Este método pode ser utilizado desde que uma raiz do polinômio seja conhecida, fato que nem sempre é simples de ocorrer, principalmente se um polinômio apresentar raízes irracionais ou complexas. Portanto, este método é útil somente para polinômios com coeficientes inteiros, onde a inspeção das raízes inteiras é algo relativamente simples de ser realizado. Nesta inspeção o teorema seguinte sobre raízes de polinômios é bastante útil da delimitação dos números inteiros que podem ser candidatos a raízes de um polinômio com coeficientes inteiros:

**Teorema:** Se r é um número inteiro que é raiz do polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ com coeficientes inteiros, então r é divisor de $a_n$.

**Demonstração:**

Se r é raiz de P(x) então: $a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0 \Rightarrow$

$r(a_0r^{n-1} + a_1r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) = -a_n$

Esta última expressão caracteriza que r é divisor de $a_n$.

Pode-se utilizar este teorema das raízes inteiras para fatorar o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 - 5x - 14$. Pelo teorema, as possíveis raízes inteiras de p(x) são os divisores de $-14$: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$. Aplicando estes oito números em p(x), se verifica que somente para $x = 7$ o valor numérico do polinômio é igual a zero. Assim, $x = 7$ é raiz e, portanto, p(x) é divisível por $x - 7$. Ao dividir p(x) por $x - 7$ encontra-se que:

$$x^3 - 6x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x^2 + x + 2).$$

## Exercícios Resolvidos

1) Fatore $2a^3 + 6a^2 + 6a + 18$.

**Solução:**

$2a^3 + 6a^2 + 6a + 18 = 2[(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 8] = 2[(a + 1)^3 + 2^3]$

Lembrando que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$:

$2a^3 + 6a^2 + 6a + 18 = 2(a + 1 + 2)[(a + 1)^2 - 2(a + 1) + 2^2] = 2(a + 3)(a^2 + 3)$

2) (Colégio Naval-96) O quociente da divisão de $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ por $(a + b)[c^2 + c(a + b) + ab]$ é:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

**Solução: Alternativa C**

Inicialmente deve-se reescrever a equação na forma: $(a + b + c)^3 - c^3 - (a^3 + b^3)$

Para fatorar $(a + b + c)^3 - c^3$ vai ser utilizado a fatoração $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy)$

$(a + b + c)^3 - c^3 - (a^3 + b^3) = (a + b + c - c)[(a + b + c)^2 + c^2 + (a + b + c)c] - (a + b)(a^2 + b^2 - ab) =$

$= (a + b)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 + ac + bc + c^2) - (a + b)(a^2 + b^2 - ab) =$

$= (a + b)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 + ac + bc + c^2 - a^2 - b^2 + ab) =$

$= (a + b)(3c^2 + 3ab + 3ac + 3bc) = 3(a + b)[c^2 + c(a + b) + ab] \Rightarrow$

O quociente da divisão é 3

3) (Olimpíada do Pará-03) Se a, b e c são reais não nulos satisfazendo:

$$a^2 - b^2 = bc \quad \text{e} \quad b^2 - c^2 = ac.$$

Prove que $a^2 - c^2 = ab$.

**Solução:**

$a^2 - b^2 = bc \Rightarrow a^2 = b^2 + bc = b(b + c) \Rightarrow b + c = \frac{a^2}{b}$.

$b^2 - c^2 = ac \Rightarrow (b + c)(b - c) = ac \Rightarrow \frac{a^2}{b}(b - c) = ac \Rightarrow a(b - c) = bc \Rightarrow$

$ab - ac = bc \Rightarrow ab = bc + ac$

Assim: $a^2 - c^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) = bc + ac = ab$

**4)** (Colégio Naval-01) O valor de $(a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + (b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$ é:

A) $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$ B) $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ C) $(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$

D) $(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ E) $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

**Solução: Alternativa E**

$(a^2 + a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + (b^2 + a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = [a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})]^{\frac{1}{2}} + [b^{\frac{4}{3}}(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}})]^{\frac{1}{2}} =$

$= a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

**5)** Dado que $x + y = \frac{5}{2}$ e $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$, determine o valor de $x^5 + y^5$.

**Solução:**

Observe que: $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = x^5 + y^5 + x^3y + xy^3 = x^5 + y^5 + (xy)^2(x + y) \Rightarrow$

$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x + y)(x^2 + y^2 - xy) - (xy)^2(x + y) \Rightarrow$

$$x^5 + y^5 = \frac{13}{4} \cdot \frac{5}{2}\left(\frac{13}{4} - xy\right) - \frac{5}{2}(xy)^2$$

Logo, falta apenas determinar o valor de xy:

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{13}{4} + 2xy \Rightarrow xy = \frac{3}{2}$

Assim: $x^5 + y^5 = \frac{13}{4} \cdot \frac{5}{2}\left(\frac{13}{4} - \frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{4} \Rightarrow x^5 + y^5 = \frac{275}{32}$

**6)** Dado que $a^2 - a - 3 = 0$, prove que $9(a^3 + 1) = 4(a^5 - a^4 - a^3 + a^2)$.

**Solução:**

Como $a^2 - a = 3$ então $a^2 - a = 3 \Rightarrow a(a - 1) = 3$

$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1) \Rightarrow a^3 + 1 = 4(a + 1)$

$a^5 - a^4 - a^3 + a^2 = a^2(a^3 - a^2 - a + 1) = a^2[(a^2(a - 1) - (a - 1)] = a^2(a - 1)(a^2 - 1) =$

$= a^2(a - 1)^2(a + 1) \Rightarrow a^5 - a^4 - a^3 + a^2 = (a + 1)(a^2 - a)^2 \Rightarrow$

$a^5 - a^4 - a^3 + a^2 = 9(a + 1)$

Desta forma, tem-se que $9(a^3 + 1) = 36(a + 1)$ e $4(a^5 - a^4 - a^3 + a^2) = 36(a + 1)$

Portanto, segue que $9(a^3 + 1) = 4(a^5 - a^4 - a^3 + a^2)$.

7) Se a, b e c são número reais não-nulos satisfazendo $(ab + ac + bc)(a + b + c) = abc$, prove que entre os números a, b e c devem existir dois que são opostos.

**Solução:**

$(ab + ac + bc)(a + b + c) = abc \Rightarrow$

$a^2b + ab^2 + abc + a^2c + abc + ac^2 + abc + b^2c + bc^2 = abc \Rightarrow$

$(a^2b + ab^2) + (a^2c + 2abc + b^2c) + ac^2 + bc^2 = 0 \Rightarrow$

$ab(a + b) + c(a^2 + 2ab + b^2) + c^2(a + b) = 0 \Rightarrow$

$(a + b)ab + c(a + b)^2 + c^2(a + b) = 0 \Rightarrow (a + b)[ab + c(a + b) + c^2] = 0 \Rightarrow$

$(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = 0 \Rightarrow (a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = 0 \Rightarrow$

$(a + b)(b + c)(a + c) = 0$

Logo, um dos termos algébricos deverá ser igual a zero, fazendo com:

$$a = -b \text{ ou } b = -c \text{ ou } a = -c.$$

8) Dado que $a + b = c + d$ e $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ prove que $a^{2011} + b^{2011} = c^{2011} + d^{2011}$.

**Solução:**

$a + b = c + d \Rightarrow (a + b)^3 = (c + d)^3 \Rightarrow$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \Rightarrow$

$3a^2b + 3ab^2 = 3c^2d + 3cd^2 \Rightarrow ab(a + b) = cd(c + d)$

1ª possibilidade: $a + b = 0$ e $c + d = 0$

Assim, tem-se que $a = -b$ e $c = -d$

Logo:

$a^{2011} + b^{2011} = a^{2011} + (-a)^{2011} = a^{2011} - a^{2011} = 0$

$c^{2011} + d^{2011} = c^{2011} + (-c)^{2011} = c^{2011} - c^{2011} = 0$

2ª possibilidade: $a + b \neq 0$ e $c + d \neq 0$

Assim, segue que $ab = cd$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = (c + d)^2 - 4cd = (c - d)^2$

i) $\begin{cases} a - b = c - d \\ a + b = c + d \end{cases} \Rightarrow 2a = 2c \Rightarrow a = c \Rightarrow b = d \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = c^{2011} + d^{2011}$

ii) $\begin{cases} a - b = d - c \\ a + b = c + d \end{cases} \Rightarrow 2a = 2d \Rightarrow a = d \Rightarrow b = c \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = c^{2011} + d^{2011}$

9) Dado que $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$, calcule o valor de $a^{2000} + a^{2010} + 1$.

**Solução:**

Da fatoração de $a^5 - 1$ sabe-se que: $a^5 - 1 = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

Multiplicando $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$ por $a - 1$ tem-se que:

$$(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = 0 \Rightarrow a^5 - 1 = 0 \Rightarrow a^5 = 0$$

Assim: $a^{2000} + a^{2010} + 1 = (a^5)^{400} + (a^5)^{402} + 1 = (1)^{400} + (1)^{402} + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

**10)** Fatorar $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

**Solução:**

Vamos inicialmente desenvolver algumas expressões algébricas em que aparece o termo $a^3 + b^3 + c^3$:

$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$ (1)

$(a + b + c)(ab + ac + bc) = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$ (2)

Subtraindo as expressões (1) e (2):

$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - (a + b + c)(ab + ac + bc) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \Rightarrow$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc)]$

Lembrando que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, segue que:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]}{2}$$

Repare que esta expressão justifica que para a, b e c maiores que zero, a igualdade $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ocorre se e somente se $a = b = c$.

**11)** (Olimpíada da Irlanda-93) Os números reais $\alpha$ e $\beta$ satisfazem as equações:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0 \text{ e } \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0.$$

Determine $\alpha + \beta$.

**Solução:**

$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^3 + 2\alpha - 16 = 0$

$\beta^3 - 2\beta^2 + 5\beta + 11 = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)^3 + 2\beta + 12 = 0$

Somando: $(\alpha - 1)^3 + (\beta - 1)^3 + 2\alpha + 2\beta - 4 = 0 \Rightarrow$

$(\alpha + \beta - 2)[(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 - (\alpha - 1)(\beta - 1)] + 2(\alpha + \beta - 2) = 0 \Rightarrow$

$(\alpha + \beta - 2)[(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 - (\alpha - 1)(\beta - 1) + 2] = 0 \Rightarrow$

Existem duas possibilidades:

i) $\alpha + \beta - 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 2$

ii) $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 - (\alpha - 1)(\beta - 1) + 2 = 0$

Fazendo $\alpha - 1 = x$ e $\beta - 1 = y$ tem-se que

$x^2 + y^2 - xy + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - (y)x + 2 + y^2 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(2 + y^2)}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{-3y^2 - 8}}{2}$$

Como o $\Delta$ desta equação é menor que zero então não existem reais x e y tais que $x^2 + y^2 - xy + 2 = 0$.

Logo, conclui-se que $\alpha + \beta = 2$.

**12)** (Olimpíada da Romênia-04) Sejam a, b, c números reais. Mostre que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a + b + c}$ se e somente se $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$.

**Solução:**

Elevando ao cubo a expressão $a + b + c$ encontra-se:

$(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 =$

$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) \Rightarrow$
$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$
Logo, $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Leftrightarrow$
$a = -b$ ou $a = -c$ ou $b = -c \Leftrightarrow$
$a + b + c = c$ ou $a + b + c = b$ ou $a + b + c = a \Leftrightarrow$
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a + b + c}$

**13)** (Olimpíada da Moldávia-00) Os números inteiros a, b, c satisfazem à relação $a + b + c = 0$. Mostre que o número $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ é um quadrado perfeito.
**Solução:**
Elevando ao quadrado $a + b + c = 0$ segue que:
$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$
Elevando ao quadrado essa última expressão:
$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(ab + ac + bc)^2 \Rightarrow$
$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 4(ab + ac + bc)^2 =$
$= 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2) =$
$= 4[a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)] = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \Rightarrow$
$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \Rightarrow 2(a^4 + b^4 + c^4) = 4(ab + ac + bc)^2 \Rightarrow$
$2(a^4 + b^4 + c^4) = [2(ab + ac + bc)]^2$

**4)** (Olimpíada de Moscow-62) Dados os números inteiros distintos x, y e z, demonstre que $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ é divisível por $5(x - y)(y - z)(z - x)$.
**Solução:**
Para demonstrar o que foi pedido, basta mostrar que na fatoração algébrica da expressão $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ aparece o termo $5(x - y)(y - z)(z - x)$.
Sejam $a = z - y$ e $b = x - z$. Assim, $x - y = a + b$.
Desta forma, segue que:
$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 = (a + b)^5 - a^5 - b^5 = (a + b)^5 - (a^5 + b^5) =$
$= (a + b)^5 - (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) =$
$= (a + b)[(a + b)^4 - a^4 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4] =$
$= (a + b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - a^4 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4) =$
$= (a + b)(5a^3b + 5a^2b^2 + 5ab^3) = 5(a + b)ab(a^2 + ab + b^2)$
Desfazendo a substituição obtém-se:
$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 =$
$= 5(x - y)(y - z)(z - x)[(z - y)^2 + (y - z)(z - x) + (z - x)^2] \Rightarrow$
$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 = 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$
Deste modo, se x, y e z são inteiros distintos, pode-se afirmar que $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ é divisível por $5(x - y)(y - z)(z - x)$.

15) Sabendo que $a + b + c = 0$, fatore as seguintes expressões:
a) $a^3 + b^3 + c^3$;
b) $a^5 + b^5 + c^5$;
c) $a^7 + b^7 + c^7$.

**Solução:**

a) $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3 \Rightarrow$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 \Rightarrow$
$a^3 + b^3 + c^3 = -3a^2b + 3ab^2 = -3ab(a + b) = -3ab(-c) = 3abc$
Assim, se $a + b + c = 0$ então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^5 = (-c)^5 \Rightarrow$
$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = -c^5 \Rightarrow$
$a^5 + b^5 + c^5 = -(5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4) = -5ab(a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2) \Rightarrow$
$a^5 + b^5 + c^5 = -5ab[(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a + b)] \Rightarrow$
$a^5 + b^5 + c^5 = -5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2) \Rightarrow$

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5ab(-c)\left[\frac{(a^2 + 2abc + b^2) + a^2 + b^2}{2}\right] = 5abc\left[\frac{(a + b)^2 + a^2 + b^2}{2}\right] \Rightarrow$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = 5abc\left[\frac{(-c)^2 + a^2 + b^2}{2}\right] = 5abc\left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right]$$

Portanto, se $a + b + c = 0$, tem-se que $a^5 + b^5 + c^5 = 5abc\left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right]$.

c) $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^7 = (-c)^7 \Rightarrow$
$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 = -c^7 \Rightarrow$
$a^7 + b^7 + c^7 = -(7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6) \Rightarrow$
$a^7 + b^7 + c^7 = -7ab(a^5 + 3a^4b + 5a^3b^2 + 5a^2b^3 + 3ab^4 + b^5) \Rightarrow$
$a^7 + b^7 + c^7 = -7ab[(a^5 + b^5) + (3a^4b + 3ab^4) + (5a^3b^2 + 5a^2b^3)] =$
$= -7ab[(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2(a + b)] =$
$= -7ab(a + b)[a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3ab(a^2 - ab + b^2) + 5a^2b^2] =$

$$= 7abc(a^4 + b^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 3a^2b^2) = 7abc\left(\frac{2a^4 + 2b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2}{2}\right) =$$

$$= 7abc\left[\frac{(a^4 + b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2) + a^4 + b^4}{2}\right] =$$

$$= 7abc\left[\frac{(a + b)^4 + a^4 + b^4}{2}\right] = 7abc\left[\frac{(-c)^4 + a^4 + b^4}{2}\right] = 7abc\left[\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right]$$

Logo, se $a + b + c = 0$, segue que $a^7 + b^7 + c^7 = 7abc\left[\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}\right]$

## 6.7. MÁXIMO DIVISOR COMUM DE POLINÔMIOS

Máximo divisor comum dois ou mais polinômios é o polinômio mônico (coeficiente do termo que define o grau igual a 1) de maior grau que os divide. Designa-se o máximo divisor de dois polinômios P e H pela notação mdc (P, H). Por exemplo, considere os polinômios $P = (x - 2)^4(x - 1)^3(x + 1)^3(x + 2)^4$ e $H = (x - 1)^4(x + 1)^2(x + 2)^2(x + 3)^3$. Note que $D = (x - 1)^3(x + 1)^2(x + 2)^2$ satisfaz a definição de mdc de dois polinômios, ou seja, D é o polinômio mônico de maior grau que divide simultaneamente P e H. O fato do mdc de dois polinômios ser mônico é devido a garantir sua unicidade, pois se esta exigência não ocorresse, existiriam infinitos polinômios que seriam mdc, uma vez que se D é divisor de maior grau de P e H então k.D, k uma constante real não nula, também é divisor (do mesmo grau de D) de P e H.

No exemplo anterior, observe que $D' = 2(x - 1)^3(x + 1)^2(x + 2)^2$ também é um polinômio de maior grau que divide simultaneamente

$P = (x - 2)^4(x - 1)^3(x + 1)^3(x + 2)^4$ e $H = (x - 1)^4(x + 1)^2(x + 2)^2(x + 3)^3$.

Quando mdc (P, H) = 1 diz-se que P e H são polinômios primos entre si.

### 6.7.1. Cálculo do mdc a partir da fatoração polinomial

O mdc de dois polinômios é formado pelo produto das menores potências dos fatores primos que figurem nos dois polinômios. Por exemplo, pode-se observar que nos polinômios $P = 3(x - 1)^3x^4(x + 1)^6$ e $H = 4x^3(x + 1)^5(x + 2)^3$ as menores potências dos fatores primos que figuram nos dois polinômios são $x^3$ e $(x + 1)^5$, fazendo com que mdc (P, H) = $x^3(x + 1)^5$. Se dois polinômios não possuírem fatores polinomiais primos em comum, então se diz que P e H são polinômios primos entre si e mdc (P, H) = 1.

**6.7.2. Teorema: Se P e H são dois polinômios não nulos e R é o resto da divisão de P por H então mdc(P, H) = mdc(H, R).**

**Demonstração:**

Se D = mdc (P, H) então $P = Q_1.D$ e $H = Q_2.D$, onde mdc ($Q_1$, $Q_2$) = 1.

Seja $D_1$ = mdc (H, R) $\Rightarrow$ $H = Q_3.D_1$ e $R = Q_4.D_1$, onde mdc ($Q_3$, $Q_4$) = 1.

Como R é o resto da divisão de P por H então: $R = P - H.Q$, onde Q é o quociente da divisão.

Substituindo: $R = Q_1.D - Q_2.D.Q$ $\Rightarrow$ $R = D(Q_1 - Q_2.Q)$, ou seja, D é divisor de R. Perceba que D é divisor de H e de R, fazendo com que também seja divisor do mdc entre H e R. Logo, conclui-se que D é divisor de $D_1$.

Por outro lado: $P = H.Q + R = Q_3.D_1.Q + Q_4.D_1 = D_1(Q_3.Q + Q_4)$ $\Rightarrow$

$D_1$ é divisor de P.

Como $D_1$ é divisor de P e de H então é divisor do mdc entre P e H. Assim, tem-se que $D_1$ é divisor de D.

Portanto, D é divisor de $D_1$ e $D_1$ é divisor de D. Logo, $D = D_1$.

### 6.7.3. Cálculo do mdc a partir do algoritmo das divisões sucessivas

O cálculo do mdc de dois polinômios pode ser realizado utilizando o teorema anteriormente demonstrado. Assim, para determinar o mdc entre os polinômios P e H procede-se da seguinte maneira:

i) Identificar o polinômio de maior grau. Suponhamos, daqui em diante, que $\partial P \geq \partial H$. Se os dois polinômios possuem mesmo grau a escolha de quem é P e quem é H é aleatória;

ii) Dividir P por H. Se $R_1$ é o resto da divisão de P por H sabe-se que:

$$\text{mdc}(P, H) = \text{mdc}(H, R_1).$$

iii) Se ocorrer de $R_1 = 0$ então $H = \text{mdc}(P, H)$. Se $R_1 \neq 0$ deve-se dividir H por $R_1$. Sendo $R_2$ o resto da divisão de H por $R_1$ sabe-se que:

$$\text{mdc}(H, R_1) = \text{mdc}(R_1, R_2);$$

iv) Se $R_2 = 0$ então $\text{mdc}(P, H) = R_1$. Se $R_2 \neq 0$ então deve-se dividir $R_1$ por $R_2$. Se $R_3$ é o resto desta última divisão, então é conhecido que:

$$\text{mdc}(R_1, R_2) = \text{mdc}(R_2, R_3);$$

v) Se $R_3 = 0$ então $\text{mdc}(P, H) = R_2$. Se $R_3 \neq 0$ deve-se repetir o procedimento até que um dos restos $R_n$ seja igual a zero. Quando isto ocorrer:

$$\text{mdc}(P, Q) = R_{n-1}.$$

Caso o mdc encontrado não seja mônico, deve-se dividir toda a expressão pelo coeficiente do termo de maior expoente em x.

Por exemplo, vamos aplicar este método para calcular o mdc entre os polinômios $12x^5 + 28x^4 + 16x^3 + 12x^2 - 4x + 8$ e $6x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
12x^5 + 28x^4 + 16x^3 + 12x^2 - 4x + 8 & 6x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 1 \\
\underline{-12x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x} & 2x + 3 \\
18x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 6x + 8 & \\
\underline{-18x^4 - 15x^3 + 3x^2 - 3x - 3} & \\
3x^3 + 13x^2 - 9x + 5 &
\end{array}$$

Uma vez que o resto desta divisão é diferente de zero deve-se dividir $6x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 1$ por $3x^3 + 13x^2 - 9x + 5$:

$$\begin{array}{r|l}
6x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 1 & 3x^3 + 13x^2 - 9x + 5 \\
\underline{-2x^4 - 26x^3 + 18x^2 - 10x} & 2x - 7 \\
-21x^3 + 17x^2 - 9x + 1 & \\
\underline{21x^3 + 91x^2 - 63x + 35} & \\
108x^2 - 72x + 36 &
\end{array}$$

Como o resto é diferente de zero deve-se dividir $3x^3 + 13x^2 - 9x + 5$ por $108x^2 - 72x + 36$. Desde que $108x^2 - 72x + 36 = 36(3x^2 - 2x + 1)$ de modo que a

próxima divisão envolva somente coeficientes inteiros em seu cálculo é interessante dividir $3x^3 + 13x^2 - 9x + 5$ por $3x^2 - 2x + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 13x^2 - 9x + 5 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-3x^3 + 2x^2 - x} & x + 5 \\ 15x^2 - 10x + 5 & \\ \underline{-15x^2 + 10x - 5} & \\ 0 & \end{array}$$

Como esta última divisão apresentou resto igual a zero então o mdc entre $12x^5 + 28x^4 + 16x^3 + 12x^2 - 4x + 8$ e $6x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 1$ é o polinômio mônico equivalente ao polinômio $3x^2 - 2x + 1$. Assim:

$$\text{mdc}\,(12x^5 + 28x^4 + 16x^3 + 12x^2 - 4x + 8,\ 6x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 1) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

## Exercícios Resolvidos

**1)** (Colégio Naval-80) O maior divisor comum dos 3 polinômios: $x^2 - 4x + 4$; $2x^2 - 8$; $mx + p$ é $x - 2$. Então:

a) $p - m = 0$ b) $2p - m = 0$ c) $2p + m = 0$ d) $p + 2m = 0$ e) $p - 2m = 0$

**Solução: Alternativa D**

Fatorando obtém-se: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, $2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$, $mx + p = m(x + p/m)$

De modo que o mdc seja igual a $x - 2$ deve-se ter $x + p/m = x - 2 \Rightarrow$

$p/m = -2 \Rightarrow p = -2m \Rightarrow p + 2m = 0$

**2)** (Colégio Naval-87) O maior divisor comum dos polinômios

$x^4 - 16$, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ e $x^4 - 8x^2 + 16$ é:

a) $x + 2$ b) $x + 4$ c) $x - 2$ d) $x - 4$ e) 1

**Solução: Alternativa C**

Fatorando:

$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$,

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3.2^1.x^2 + 3.2^2.x^1 - 2^3.x^0 = (x - 2)^3$,

$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2)^2 - 2(4)(x^2) + 4^2 = (x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2$

Assim, observando a fatoração dos polinômios, pode-se afirmar que mdc = $x - 2$

## 6.8. MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM DE POLINÔMIOS

Mínimo múltiplo comum de dois ou mais polinômios é o polinômio mônico de menor grau que é divisível por todos eles. Designa-se o mínimo múltiplo comum pela abreviatura mmc.

### 6.8.1. Cálculo do mmc a partir da fatoração polinomial

O mmc de dois ou mais polinômios é igual ao produto dos fatores primos polinomiais que figuram em todas as expressões, quer sejam comuns ou não, cada um elevado ao respectivo maior expoente. Por exemplo, sejam

$P = (x-2)^4(x-1)^3(x+1)^3(x+2)^1$ e $H = (x-1)^4(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^3$.

O mmc entre estes dois polinômios vale $(x-2)^4(x-1)^3(x+1)^3(x+2)^4(x+3)^3$.

## Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-66) Dar o quociente do m.m.c. pelo m.d.c das expressões: $2x^2+9x+4$ e $16x^2+16x+4$.

**Solução:**

Fatorando $2x^2 + 9x + 4$ obtém-se $2x^2 + 9x + 4 = (2x + 1)(x + 4)$.

Fatorando $16x^2 + 16x + 4$ obtém-se $16x^2 + 16x + 4 = 4(2x + 1)^2$

Assim, o mmc vale $4(2x + 1)^2(x + 4)$, enquanto que o mdc vale $(2x + 1)$.

Dividindo-se $4(2x + 1)^2(x + 4)$ por $(2x + 1)$ obtém-se como quociente

$$4(2x + 1)(x + 4) = 8x^2 + 36x + 16$$

# Exercícios propostos

**Operações Fundamentais**

**1)** (ESSA-81) Sendo $P_1 = x^3 + 2x^2 - x + 1$; $P_2 = 6 - 5x + 3x^3$, $P_3 = 2x^3 + 2x^2 + 3x$. O resultado de $P_1 - P_2 + P_3$:
(A) $2x^2 + 5x + 5$ (B) $6x^3 + 4x^2 - 3x + 7$
(C) $4x^2 + 7x - 5$ (D) $-4x^3 - 9x + 7$

**2)** (ESSA-83) A diferença entre $2x^2 - 5x + 3$ e $2x^2 - 6x + 2$ é:
(A) $-11x + 5$ (B) $x + 1$ (C) $x + 5$ (D) $11x - 5$

**3)** (ESSA-86) Efetuando a expressão $(x^n + x - 1)(x^{n-1} - 1)$, obtemos:
(A) $x^{2n-1} - x^{n-1} - x + 1$ (B) $x^{2n-1} + 2x^n + x - 1$ (C) $x^{2n-2} + x^{n-1} - 2x + 1$
(D) $x^{2n-1} - 2x^{n-1} - 2x - 1$ (E) $x^{2n+1} - x^{n-1} + x + 1$

**4)** (ESSA-88) O valor numérico do polinômio $x^3y + x^2y^2 - xy^3$, para $x = -1$ e $y = -2$, é:
(A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) $-2$ (E) $-4$

**5)** (ESSA-90) O valor numérico de $(x + y)(x - y)$ para $x = -2$ e $y = 5$ é:
(A) $-7$ (B) 2 (C) $-21$ (D) $-28$ (E) $-35$

**6)** (CM Brasília-03) Um fazendeiro estabelece o preço da saca de café em função da quantidade de sacas adquiridas pelo comprador através da equação $P = 50 + \frac{200}{x}$, em que P é o preço em dólares e x é o número de sacas vendidas. Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir cem (100) sacas?
a) 520 dólares. b) 52,5 dólares. c) 52 dólares. d) 50,5 dólares. e) 51 dólares.

**7)** (CM Brasília-05) A soma dos coeficientes do polinômio resultante da operação $(3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x)^2$ é igual a
A ( ) 0. B ( ) 2. C ( ) 4. D ( ) 6. E ( ) 8.

**8)** (CM RJ-04) Numa fábrica de peças de automóveis, o número de peças produzidas por dia, nas primeiras t horas diárias de trabalho, é dado por $f(t) = 50(t^2 + t)$, onde $0 \leq t \leq 12$. Assim, o número de peças produzidas na quarta hora de trabalho é:
A) 1 000. B) 800. C) 600. D) 400. E) 200.

**9)** (CM RJ-05) Efetuando o produto

$$(1 - a + a^2 - a^3 + ... + a^{98} - a^{99} + a^{100})(1 + a)$$

encontramos

a) $1 + a^{101}$

b) $a + a^{101}$

c) $a + a^2 + a^3 + ... + a^{99} + a^{100} + a^{101}$

d) $a - a^2 + a^3 - a^4 + ... + a^{99} - a^{100} + a^{101}$

e) $1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{99} + a^{100} + a^{101}$

**10)** (EEAR-16) Dado o polinômio: $ax^3 + (2a + b)x^2 + cx + d - 4 = 0$, os valores de a e b para que ele seja um polinômio de 2° grau são

a) $a = 0$ e $b = 0$ b) $a = 1$ e $b \neq 0$ c) $a = 0$ e $b \neq 0$ d) $a = -1$ e $b = 0$

**11)** (EEAR-09) Se 3, 5 e $-2$ são as raízes da equação $4(x - a)(x - b)(x - 5) = 0$, o valor de $a + b$ é

a) 0. b) 1. c) 2. d) 3.

**12)** (Colégio Naval-15) A equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ possui três raízes reais. Sejam p e q números reais fixos, onde p é não nulo. Trocando x por $py + q$, a quantidade de soluções reais da nova equação é:

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

**13)** (ESSA-16) O grau do polinômio $(4x - 1)(x^2 - x - 3)(x + 1)$ é

a) 6 b) 5 c) 3 d) 4 e) 2

**14)** (EEAR-18) Sejam os polinômios $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$, $B(x) = ax^3 - bx^2 - 4x + 1$ e $P(x) = A(x) - B(x)$. Para que $P(x)$ seja de grau 2, é necessário que

a) $a \neq -1$ e $b = -2$ b) $a = 1$ e $b = -2$

c) $a = 1$ e $b \neq -2$ d) $a \neq 1$ e $b \neq 2$

**15)** (EEAR-17) Considere $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$, tal que $P(1) = -2$ e $P(2) = 6$. Assim, os valores de b e c são, respectivamente,

a) 1 e 2 b) 1 e $-2$ c) $-1$ e 3 d) $-1$ e $-3$

**16)** (ITA-70) Um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que $P(-2) = -2$, $P(-1) = 3$, $P(1) = -3$ e $P(2) = 2$. Temos então que:

(a) $b = 0$ (b) $b = 1$ (c) $b = 2$ (d) $b = 3$ (e) nda

**Produtos Notáveis**

1) (UFLA-00) Um famoso mágico, senhor X, realizou a seguinte mágica: $4 = 5$

1° passo: $16 - 36 = 25 - 45$

2° passo: $16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$

3° passo: $(4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + (\frac{9}{2})^2 = (5)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + (\frac{9}{2})^2$

4° passo: $(4 - \frac{9}{2})^2 = (5 - \frac{9}{2})^2$

5° passo: $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$

6° passo: $4 = 5$

O passo onde é cometido um absurdo matemático é:

a) 5° passo b) 1° passo c) 2° passo d) 3° passo e) 4° passo

2) (ESSA-96) A expressão $(a + b)^2.(a - b)^2$ é equivalente a:

a) $a^4 - b^4$ b) $a^4 + b^4$ c) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ d) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ e) $a^4 - 2a^2b^2 - b^4$

3) (CM Brasília-03) Simplificando a expressão $\sqrt{\left(a^4 - \frac{6}{5}a^2 + 0{,}36\right)^2}$, obtém-se:

a) $a + 3/5$ b) $a - 3/5$ c) $a^2 - 0{,}8$ d) $a^2 + 3/5$ e) $a^2 - 3/5$

4) (CM Brasília-03) Considerando a expressão $\frac{x^4}{y^6} + E + \frac{9}{k^2}$ um trinômio quadrado perfeito, o valor de E para $x = k = -y = 2$ é:

A ( ) $-8$ B ( ) $-6$ C ( ) $-1{,}5$ D ( ) 1 E ( ) 1,6

5) (CM Brasília-04) Simplificando a expressão $\sqrt{a^6 - \frac{4}{5}a^3 + 0{,}16}$, obtém-se:

a) $a + 2/5$ b) $a^3 - 2/5$ c) $a^2 + 2/5$ d) $a^3 + 2/5$ e) $a^3 + 0{,}4$

6) (CM Brasília-07) A expressão $\sqrt{(\sqrt[3]{63} + 4)^2} + \sqrt{(\sqrt[3]{63} - 4)^2}$ é igual a

a) 0 b) $2\sqrt[3]{63}$ c) 8 d) $\sqrt[3]{63}$ e) 4

7) (CM Brasília-09) Considere a expressão $x = \left(\sqrt{10 + \sqrt{19}}\right).\left(\sqrt{10 - \sqrt{19}}\right)$. O valor positivo de x é

a) 9 b) 19 c) 29 d) 39 e) 109

8) (CM Fortaleza-06) Se a + b + c = 0, com a, b e c números reais, então:
( a ) $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ ( b ) $a^2 + b^2 = c^2$ ( c ) $a^3 + b^3 = c^3$
( d ) $a^2 = b^2 + c^2$ ( e ) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

9) (Colégio Naval-12) Sejam 'a', 'b', e 'c' números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=p$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=q$ e ab + ac + bc = r. O valor de $q^2 + 6q$ é sempre igual a

a) $\frac{p^2r^2+9}{4}$ b) $\frac{p^2r^2-9p}{12}$ c) $p^2r^2-9$ d) $\frac{p^2r^2-10}{4r}$ e) $p^2r^2-12p$

10) (CM RJ-07) Se $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2=5$, então $n^6+\frac{1}{n^6}$ vale:

a) 9 b) $5\sqrt{5}$ c) 18 d) 27 e) 125

11) (CM RJ-07) O maior inteiro que não excede a $\sqrt{n^2-10n+29}$, para n = 20072007, é igual a:
A) 20072002 B) 20072003 C) 20072004
D) 20072005 E) 20072006

12) (CM RJ-07) Sendo $A=\sqrt{17-2\sqrt{30}}-\sqrt{17+2\sqrt{30}}$ o valor de $(A+2\sqrt{2})^{2007}$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13) (Colégio Naval-12) O número real $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ é igual a

a) $5-\sqrt{3}$ b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ c) $3-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{13-3\sqrt{3}}$ e) 2

14) (ESPM-04) Se x é um número real tal que $x+\frac{1}{x}=3$, então o valor de $x^3+\frac{1}{x^3}$ é:
a) 27; b) 25; c) 21; d) 18; e) 15.

15) (FGV-10) Se x é um número positivo tal que $x^2+\frac{1}{x^2}=14$, o valor de $x^3+\frac{1}{x^3}$ é
A) 52. B) 54. C) 56. D) 58. E) 60.

**16)** (Colégio Naval-15) Seja x um número real tal que $x+\frac{3}{x}=9$. Um possível valor de $x-\frac{3}{x}$ é $\sqrt{a}$. Sendo assim, a soma dos algarismos de "a" será:

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

**17)** (IME-08) Seja x um número real ou complexo para o qual $x+\frac{1}{x}=1$. O valor de $x^6+\frac{1}{x^6}$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

**18)** (Colégio Naval-82) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$ é igual a:

a) $1+\sqrt{7}$ c) $1+\sqrt{5}$ e) $1+\sqrt{2}$ b) $1+\sqrt{6}$ d) $1+\sqrt{3}$

**19)** (Colégio Naval-84) $\sqrt{3+2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}-\sqrt{3-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ é igual a:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

**20)** (Colégio Naval-92) O valor numérico da expressão $a^4-2a^2b^2+b^4$ para $a=\frac{8}{17}$ e $b=\frac{9}{17}$ é um número N tal que:

a) $N<0$ b) $10^{-4}<N<10^{-3}$ c) $10^{-3}<N<10^{-2}$
d) $10^{-2}<N<10^{-1}$ e) $10^{-1}<N<1$

**21)** (Colégio Naval-93) O resultado mais simples para a expressão $\sqrt[4]{\left(\sqrt{48}+7\right)^2}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{48}-7\right)^2}$ é

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt[4]{3}$ (C) 4 (D) $2\sqrt{7}$ (E) $\sqrt{4\sqrt{3}+7}+\sqrt{4\sqrt{3}-7}$

**22)** (Colégio Naval-93) Um aluno encontrou zero para o valor numérico da expressão $x^2+y^2-2x+5+4y$. Pode-se concluir que os valores pelos quais substituiu as variáveis x e y são tais que a soma é:

(A) $-2$ (B) $-1$ (C) 0 (D) 1 (E) 2

**23)** (Colégio Naval-02) Se $2<x<3$, então $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ é igual a:

a) 2 b) $\sqrt{x}$ c) $2\sqrt{x-1}$ d) $2\sqrt{x}$ e) 3

**24)** (Colégio Naval-03) Se $a=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ e $b=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, então **a + b** é igual a:

a) $\sqrt{10}$ b) 4 c) $2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{5}+1$ e) $\sqrt{3}+2$

**25)** (Colégio Naval-05) Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}$, no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado, e, assim sendo, procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta. Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples, concluiu, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi

a) 3,00 b) 3,05 c) 3,15 d) 3,25 e) 3,35

**26)** (Colégio Naval-08) Se $x + y = 2$ e $(x^2 + y^2) / (x^3 + y^3) = 4$, então xy é igual a

a) 12/11 b) 13/11 c) 14/11 d) 15/11 e) 16/11

**27)** (EPCAr-01) Se $3^x + 3^{-x} = 5$ então $2.(9^x + 9^{-x})$ é igual a

a) 50 b) 46 c) 25 d) 23

**28)** (Colégio Naval-18) Sejam a, b e c números reais tais que

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4a + 2b - 2c + 6 = 0.$$

Sobre a, b e c são feitas as seguintes afirmações:

I – $a^b < b^a$

II – $c^{b^a} = 1$

III – $b^{(-a)} = (-c)^b$

IV – $a > b > c$

Sendo assim, é correto afirmar que a quantidade de afirmativas verdadeiras é

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

**29)** (Olimpíada de Campina Grande-03) A expressão

$$\sqrt{4+4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\sqrt{4-4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$$

é igual a um número inteiro. Então, este número é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 7

**30)** (Olimpíada de Minas Gerais-05) Qual o valor inteiro da expressão

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\ ?$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) – 2

31) (Olimpíada do Rio de Janeiro-07) Dado que x e y são reais positivos tais que $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 33xy = 2662$, determine o valor numérico de $S = x + y$.

32) (OBM-03) Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$, quaisquer que sejam os reais x e y.

33) (OBM-02) Sejam x, y, z números inteiros tais que $x + y + z = 0$. Sobre $x^3 + y^3 + z^3$ são feitas as seguintes afirmativas:

i) É necessariamente múltiplo de 2.
ii) É necessariamente múltiplo de 3.
iii) É necessariamente múltiplo de 5.

Podemos afirmar que:

a) somente i) é correta.
b) somente ii) é correta.
c) somente i) e ii) são corretas.
d) somente i) e iii) são corretas.
e) i), ii) e iii) são corretas.

34) (OBM-04) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

A) 64 B) 109 C) 120 D) 124 E) 154

35) (OBM-05) O número $(2+\sqrt{2})^3(3-\sqrt{2})^4 + (2-\sqrt{2})^3(3+\sqrt{2})^4$ é:

A) inteiro ímpar B) inteiro par C) racional não inteiro
D) irracional positivo E) irracional negativo

36) (Olimpíada do Chile-94) Seja x um número tal que $x + \frac{1}{x} = -1$. Calcule $x^{1994} + \frac{1}{x^{1994}}$.

37) (Olimpíada Báltica-92) Dado que $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$. Prove que $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$.

38) (Olimpíada dos Estados Unidos-95) Prove que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$

39) (Olimpíada do Ceará-03) Simplifique a expressão $\sqrt{9-6a+a^2} + \sqrt{9+6a+a^2}$, sabendo que $a < -3$.

40) Determinar os valores dos números reais x, y e z de modo que

$$x^2 + y^2 + 2y - 4x + 5 + 9z^2.$$

41) Sejam x, y e z são números reais que verificam a seguinte igualdade:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 14 = 2(x + 2y + 3z).$$

Determine os valores de x, y e z.

42) Dado que $14(a^2 + b^2 + c^2) = (a + 2b + 3c)^2$, determine a razão a : b : c.

43) Se a, b, c, d > 0 e $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, prove que a = b = c = d.

44) Calcule o valor da expressão:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}).$$

45) Prove que se a, b, c e d são números reais e

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + d)^2 = 4(ab + bc + cd),$$

então a = b = c = d.

46) Se x é um número real tal que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}},$$

obter o valor de $x^3 + bx + a$.

47) (Olimpíada da Grande PoA-12) Decidir se o número

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}$$

É racional ou irracional. Justifique.

48) (Olimpíada de São Paulo-08) Os números reais a, b e c são tais que a + b + c = 15 e ab + bc + ca = 75.
(a) Determine $a^2 + b^2 + c^2$.
(b) Calcule $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.
(c) Encontre os valores de a, b e c.

49) (Olimpíada da Austrália-15) Determine o menor valor inteiro y para o qual existe um inteiro positivo x satisfazendo a equação $2^{13} + 2^{10} + 2^x = y^2$.

50) Denomina-se de número afortunado como um número que pode ser expresso por $3x^2 + 32y^2$, onde x e y são inteiros. Prove que se $n$ é um número afortunado, então $97n$ também é.

51) (Stanford Tournament-08) Simplifique $\sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7}+45}{4}}$.

**Divisão de Polinômios**

1) (EEAR-17) Ao dividir $3x^3 + 8x^2 + 3x + 4$ por $x^2 + 3x + 2$ obtém-se _____ como resto
a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

2) (ESSA-85) Numa divisão exata temos o dividendo igual a $x^2 - 3x - 70$ e o quociente igual a $x - 10$. Logo, o divisor é:
a) $x + 7$ b) $x - 7$ c) $x^2 - 2x - 80$ d) $x^3 - 13x^2 - 40x + 700$

3) (CM RJ-03) Dividindo o trinômio $x^2 - x + 2$ por $x + 3a$, obtém-se quociente $x - b$ e resto $2a + 3b$, com a e b inteiros. A soma desses valores inteiros de a e b é:
A) 5. B) 3. C) 1. D) –2. E) –3.

4) (UFCE-09) Os números reais u e v, para os quais o polinômio $p(x) = ux^3 + vx^2 - 73x + 102$ é divisível por $q(x) = x^2 - 5x + 6$, cumprem a condição
a) $u + v = 73$. b) $u + v = 102$. c) $u + v > 102$. d) $u + v < 73$.

5) (Unicamp-17) Considere o polinômio $p(x) = x^n + x^m + 1$, em que $n > m \geq 1$. Se o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é igual a 3, então
a) $n$ é par e $m$ é par. b) $n$ é ímpar e $m$ é ímpar.
c) $n$ é par e $m$ é ímpar. d) $n$ é ímpar e $m$ é par.

6) (Colégio Naval-77) O resto da divisão de $x^3 - x^2 + 1$ por $x - 2$ é:
(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) – 2 (E) – 5

7) (Colégio Naval-88) No processo da divisão do polinômio P(x), de coeficientes não nulos, pelo polinômio g(x), obteve-se, para quociente um polinômio do 4° grau e, para penúltimo resto, um polinômio do 2° grau. Considerando-se as afirmativas,
I) O grau de P(x) é 6
II) O grau de g(x) pode ser 1
III) P(x) é composto de 7 monômios.
Conclui-se que:
a) apenas I é verdadeira. b) apenas III é falsa.
c) apenas II é verdadeira. d) apenas I e III são verdadeiras.
e) todas são falsas.

8) (Colégio Naval-11) Sejam $p(x) = 2x^{2010} - 5x^2 - 13x + 7$ e $q(x) = x^2 + x + 1$. Tomando r(x) como sendo o reto na divisão de p(x) por q(x), o valor de r(2) será.
a) – 8 b) – 6 c) – 4 d) – 3 e) – 2

9) (Colégio Naval-13) Seja $P(x) = 2x^{2012} + 2012x + 2013$. O resto r(x) da divisão de P(x) por $d(x) = x^4 + 1$ é tal que r (-1) é:
a) – 2 b) – 1 c) 0 d) 1 e) 2

10) (Unicamp-15) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + ax - a$, onde a é um número real. Se x = 1 é a única raiz real de p(x), então podemos afirmar que
a) $a < 0$. b) $a < 1$. c) $a > 0$. d) $a > 1$.

11) (FGV-16) Sabendo-se que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 2^k + 2$ por x – 3 é igual a $4^k - 220$, o valor de k é
a) – 4. b) – 2. c) 2. d) 3. e) 4.

12) (EsPCEx-19) Dividindo-se o polinômio $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + kx - 1$ por (x – 3) e (x + 2), os restos são iguais. Neste caso, o valor de k é igual a
[A] 10. [B] 9. [C] 8. [D] 7. [E] 6.

13) (Colégio Naval-81) Para se decompor a fração $\frac{3x-4}{x^2-5x+6}$ na soma de duas outras frações com denominadores do 1º grau, a soma das constantes que aparecerão nos numeradores dará:
(A) 3 (B) – 5 (C) 6 (D) – 4 (E) 5

14) (Colégio Naval-83) O valor da expressão $\frac{(a-2)x^3+(b-1)x^2+(c-1)x+10}{x^2-x+5}$ independe de x. A soma dos valores de a, b e c é:
a) 4 b) 2 c) – 3 d) 0 e) 1

15) (Colégio Naval-84) Se a divisão $\frac{(x^3-6x^2+12x-8)^{10}+2x^2-8x+1+k}{x^2-4x+4}$ é exata, o valor de k é:
(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

16) (Colégio Naval-85) Efetuando o produto
$$(x + 1)(x^{100} - x^{99} + x^{98} - x^{97} + \ldots\ldots + x^2 - x + 1),$$
encontramos:
a) $x^{100} - 1$ b) $x^{200} + 1$ c) $x^{101} + x^{50} - 1$ d) $2x^{100} + 2$ e) $x^{101} + 1$

17) (Colégio Naval-85) Seja $P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 3x - 2$ e $Q(x) = x^2 - 3x + 1$; se P(x) ÷ Q(x) determina um quociente Q' (x) e o resto R(x), o valor de Q' (0) + R(1) é:
(A) 0 (B) 28 (C) 25 (D) 17 (E) 18

**18)** (Colégio Naval-86) O coeficiente do termo do 2° grau do produto entre o quociente e o resto, resultante da divisão de $x^2 - 3x + x^4 + 7$ por $2 - x^2$ é:
(A) −22 (B) −11 (C) −10 (D) −1 (E) 1

**19)** (Colégio Naval-91) A divisão do polinômio $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ pelo polinômio $D(x) = 2x^2 - 3x + 1$ apresenta quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$. Assinale a alternativa falsa.
a) $R(1) = 3$
b) $R(x) > 0$ para $x > \frac{1}{9}$
c) o menor valor de $Q(x)$ ocorre para $x = \frac{3}{4}$
d) A média geométrica dos zeros de $Q(x)$ é $\frac{\sqrt{22}}{4}$
e) O valor mínimo de $Q(x)$ é $\frac{35}{32}$

**20)** (Escola Naval-00) Dividindo-se $(2x^3 - x^2 + mx + 8)$, onde $m \in IR$, por $(x + 2)$ obtém-se resto igual a (-6). Qual o polinômio que representa o quociente da divisão de $(4x^3 - 7x + 3)$ por $(2x - m)$?
a) $-2x^2 + 3x + 1$ b) $2x^2 + 2x - 1$ c) $-x^2 + 2x - 1$ d) $x^2 + 3x + 1$ e) $2x^2 - 3x + 1$

**21)** (FGV-08) Dividindo o binômio $P(x) = 3x^{101} + 1$ pelo binômio $D(x) = x^2 - 1$, obtemos como resto o binômio $R(x) = ax + b$. Determine os coeficientes a e b do binômio R(x).

**22)** (EEAR-20) Se $Q(x) = ax^2 + bx + c$ é o quociente da divisão de $G(x) = 6x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ por $H(x) = x - 1$, então o valor de $b + c$ é
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

**23)** (FGV-09) Seja $P(x) = x^2 + bx + c$, com b e c inteiros. Se P(x) é fator de $T(x) = x^4 + 6x^2 + 25$ e de $S(x) = 3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$, então, P(1) é igual a
A) 0. B) 1. C) 2. D) 3. E) 4.

**24)** (IBMEC-08) Um polinômio P(x) é divisível pelos polinômios $(x^2 - 5x + 6)$ e $(x^2 - 7x + 12)$. Sobre esse polinômio são feitas três afirmações.
I. O grau de P(x) é igual a 4.
II. O grau de P(x) pode ser igual a 3.
III. O resto da divisão de P(x) por $(x^2 - 6x + 8)$ é igual a 0.
É(São) verdadeira(s), necessariamente, apenas a(s) afirmação(ões)
a) I. b) II. c) III. d) I e III. e) II e III.

25) (EEAR-13) O resto da divisão de $4x^3 + 2x^2 + x - 1$ por $x^2 - 3$ é igual a
a) $13x + 5$ b) $11x - 3$ c) $2x + 5$ d) $6x - 3$

26) (UEL-10) O resto da divisão de um polinômio P(x) por $(x - 2)$ é 7 e o resto da divisão de P(x) por $(x + 2)$ é $-1$. Desse modo, o resto da divisão de P(x) por $(x - 2)(x + 2)$ é
a) 6 b) 8 c) $7x - 1$ d) $2x + 3$ e) $3x + 2$

27) (UFU-10) Considere o polinômio de variável real
$p(x) = (x - 1).(x^2 - 2).(x^3 - 4).(x^4 - 8).(x^5 - 16)...(x^{15} - 16384)$.
Então, o grau de p e o valor de p(2) são, respectivamente:
A) 120 e $2^{112}$ B) 136 e $2^{112}$ C) 136 e $2^{105}$ D) 120 e $2^{105}$

28) (UFAL-07) Nas divisões de um polinômio p por $ax - b$ e $bx - a$, em que a e b são constantes reais não nulas e tais que $a \neq b$, são obtidos restos iguais e quocientes $q_1$ e $q_2$, respectivamente.
0 0 - $q_1(x)$ é divisível por $ax - b$.
1 1 - $q_2(x)$ é divisível por $ax - b$.
2 2 - $q_1(x) - q_2(x)$ é divisível por $x + 1$.
3 3 - $q_1(x) + q_2(x)$ é divisível por $x - 1$.
4 4 - $p(a/b) + p(b/a) = 0$

29) (EsPCEx-15) Considere os polinômios $p(x) = x^{80} + 3x^{79} - x^2 - x - 1$ e $b(x) = x^2 + 2x - 3$. Sendo r(x) o resto da divisão de p(x) por b(x), o valor de r(1/2) é igual a
a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2 e) 5/2

30) (UFAM-09) Sejam $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dois polinômios quaisquer. Se grau(p) = n e grau(q) = m, então é sempre correto afirmar que:
a) $\text{grau}(p^3.q^2) = \min\{n^3, m^2\}$ b) $\text{grau}(p^2.q^3) = 2n + 3m$
c) $\text{grau}(p + q) = n + m$ d) $\text{grau}(p^3.q) = n^3.m$
e) $\text{grau}(p + q) = \max\{n, m\}$

31) (UFPE-06) Um polinômio P(x), com coeficientes reais, é tal que P(1) = 1 e P(2) = -1. Calcule R(-11/2), se R(x) é o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 3x + 2$.

32) (UFPE-08) O polinômio $x^3 + ax + b$ tem coeficientes a e b reais e é divisível por $x + 1$ e por $x + 2$. Assim, é correto afirmar que:
A) a = -7 e b = 6 B) a = -7 e b = -6 C) a = 7 e b = -6
D) a = 7 e b = 6 E) a = 6 e b = 7

33) (Olimpíada do Ceará-85) Encontre o quociente da divisão de $a^{128} - b^{128}$ por
$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})(a^{32} + b^{32})(a^{64} + b^{64})$.

**Fatoração**

1) (ESSA-76) Fatorando $x^4 - 10x^2 + 25$, temos:
(A) $(x^2 - 5)^2$ (B) $(x^2 - 5)$ (C) $(x^2 + 5)^2$ (D) $(x + 5)(x - 5)$

2) (ESSA-77) Se fatorarmos a expressão $4x^2 - 9y^2$, encontraremos:
(A) $(2x + 3y)(2x - 3y)$ (B) $(2x - 3y)^2$
(C) $(2x + 3y)(2x - 3y)$ (D) $(2y - 3x)(2y + 3x)$

3) (ESSA-78) O valor numérico da expressão $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ para $a = 1$ e $b = -2$ é:
(A) 11 (B) 27 (C) 1 (D) -27

4) (ESSA-78) Calculando $3 - [(x + 1)^2 - (x - 2)(x + 1)]$, encontramos:
(A) 0 (B) x (C) $-3x$ (D) 2

5) (ESSA-78) O quociente da divisão de $(x^3 + 1)$ por $(x + 1)$ é:
(A) $(x + 1)^2$ (B) $x^2 - x + 1$ (C) $x^2 + 1$ (D) $x^2 + x + 1$

6) (ESSA-79) Fatorando-se a expressão $9x^4 - 24x^2z + 16z^2$ obtém-se:
(A) $(4x^2 - 3z)^2$ (B) $(4x - 3z^2)^2$ (C) $(3x^2 - 4z)^2$ (D) $(3x^2 + 4z)^2$

7) (ESSA-79) A expressão $a^2 - 7a + 12$, depois de fatorada, resulta:
a) $(a - 4)(a - 3)$ b) $(a + 4)(a - 3)$ c) $(a - 4)(a + 3)$ d) $(a + 4)(a + 3)$

8) (ESSA-79) A fatoração de $16x^4 - y^4$ conduz a:
(A) $(4x^2 - y^2)^2$ (B) $(2x - y)^4$
(C) $(4x^2 + y^2)(2x + y)^2$ (D) $(4x^2 + y^2)(2x + y)(2x - y)$

9) (ESSA-80) Fatorando a expressão $x^3 - xy^2 + x^2y - y^2$ encontramos:
(A) $(x - y)(x^2 - y^2)$ (B) $(x + y)(x^2 - y^2)$
(C) $(x - y)^2 (x^2 - y^2)$ (D) $(x + y)^2 (x^2 - y^2)$

10) (ESSA-82) Fatorando o trinômio $x^2 - x - 42$, encontramos:
(A) $(x - 6)(x - 7)$ (B) $(x - 7)(x + 6)$
(C) $(x + 7)(x + 6)$ (D) $(x - 1)(x - 42)$

11) (ESSA-84) A forma fatorada da expressão $ax - ay + 2x - 2y$ é:
(A) $(a + 2)(x + y)$ (B) $2(x - y)$ (C) $(x + y)(a - 2)$ (D) $(a + 2)(x - y)$

12) (ESSA-85) Fatorando-se o polinômio $ax + ay - bx - by$, obtém-se:
a) $(a + b)(x - y)$ b) $(a - y)(b + x)$ c) $(a - b)(x + y)$ d) $(a + x)(b - y)$

13) (ESSA-86) A expressão

$(a + b)^2 + 2(b - a)(b + a) + (a^3 - b^3) + (a - b)^2 + (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

é igual a:

(A) $2(a^3 - 2ab^2)$ (B) $2(a^3 + b^2)$ (C) $2(a^3 - b^3 + 2b^2)$

(D) $2(a^3 + 2b^2)$ (E) $2(a^3 + b^3 - 2b^2)$

14) (ESSA-87) Fatorando a expressão $6a^2 - 3ab + 4ab - 2b^2$, obtemos:

(A) $3a(a + b)$ (B) $(2a - b)(3a + 2b)$ (C) $(2a + b)(3a - 2b)$

(D) $(3a + 2b)(2a + 2b)$ (E) $(3a - 2b)(2a - b)$

15) (Colégio Naval-16) Seja $k = \left(\frac{9999...997^2 - 9}{9999...994}\right)^3$ onde cada um dos números 9999 997 e 9999 994, são constituídos de 2015 algarismos 9. Deseja-se que $\sqrt[i]{k}$ seja um número racional. Qual a maior potência de 2 que o índice i pode assumir?

a) 32 b) 16 c) 8 d) 4 e) 2

16) (Colégio Naval-11) Considere o sistema abaixo nas variáveis reais x e y, sendo a e b reais.

$$\begin{cases} 375y^2x - 125y^3 - 375yx^2 + 125x^3 = 125b \\ y^2 + x^2 + 2yx = a^2 \end{cases}$$

Nessas condições, qual será o valor de $(x^2 - y^2)^6$?

a) $a^3b^6$ b) $a^8b^6$ c) $a^6b^2$ d) $a^3b^6$ e) $a^4b^6$

17) (ESSA-89) Fatorando $4x^2 - 4x + 1$, obtemos:

a) $(4x - 1)^2$ b) $(x - ½)^2$ c) $(4x + 1)^2$ d) $(2x - 1)^2$ e) $(2x + 1)^2$

18) (ESSA-92) A forma simplificada da expressão $(x - y)^2 - (x + y)(x - y)$ é:

a) $-2xy$ b) $2x^2 - 2xy$ c) $2xy$ d) $y^2 - 2xy$ e) $2y(y - x)$

19) (ESSA-94) Fatorando a expressão $x^2 + 100x + 99$, obtemos:

(A) $(x + 1)(x + 99)$ (B) $(x + 1)(x - 99)$ (C) $(x - 1)(x + 99)$

(D) $(x - 1)(x - 99)$ (E) $(x + 100)(x + 99)$

20) (ESSA-95) Na fatoração do polinômio $x^2 + y^2 - 2xy - x + y$, um dos fatores é:

(A) $x - y - 1$ (B) $x + y$ (C) $x + y - 1$ (D) $x - y + 1$ (E) $x + y + 1$

21) (ESSA-02) A expressão algébrica $X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ + X + Y - Z$ admite como fator:

(A) $-X + Y + Z + 1$; (B) $X - Y - Z + 1$; (C) $X + Y - Z + 1$;

(D) $X - Y + Z + 1$; (E) $X + Y + Z + 1$.

22) (ESSA-04) Sendo x = 19 e y = 81, então a expressão $(x + y)^2 + x^2 - y^2 + 2x$ é divisível por:
a) 2, 19 e 81 b) 1, 19 e 101 c) 2, 81 e 101
d) 19, 100 e 101 e) 81, 100 e 101

23) (CM Manaus-10) Um dos fatores da expressão $x^2 - y^2 + (x + y + 1)^2 - 1$ é:
a) x – y b) x – 1 c) x + y + 1 d) x – y – 1 e) x + 1

24) (CM Santa Maria-05) Se x + y = 2, o valor de $x^4 + y^4 - x^3y^2 - x^2y^3 + 16xy$ é:
a. ( ) 2 b. ( ) 4 c. ( ) 8 d. ( ) 16 e. ( ) 32

25) (CM RJ-07) Na fatoração do trinômio $a^5 - 5a^3 + 4a$ aparecem os seguintes fatores:
A) a + 2 e a – 3 B) a + 3 e a – 2 C) a + 4 e a – 1
D) a + 1 e a – 3 E) a + 2 e a – 1

26) (UESPI-04) Se a + b = x, $a^2 + b^2 = y$, então, podemos afirmar que $a^3 + b^3$ é igual a:
a) $x(3y - x^2)/2$ b) $y(3x - y^2)/2$ c) $x(2y - x^2)/2$
d) $y(2x - x^2)/2$ e) $y(2y - x^2)/2$

27) (FGV-10) Fatorando completamente o polinômio $x^9 - x$ em polinômios e monômios com coeficientes inteiros, o número de fatores será
A) 7. B) 5. C) 4. D) 3. E) 2.

28) (Colégio Naval-11) Sabe-se que $p(x) = acx^4 + b(a + c)x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + b(a + c)x + ac$ é um produto de dois polinômios do 2º grau e que os números a, b, c são reais não nulos distintos, com $(b^2 - 4ac)$ positivo. Nessas condições, é correto afirmar que
a) há apenas um valor real de x tal que p(x) = 0
b) há apenas dois valores reais de x tais que p(x) = 0
c) há apenas três valores reais de x tais que p(x) = 0
d) há quatro valores reais de x tais que p(x) = 0
e) não há valores reais de x tais que p(x) = 0

29) (Colégio Naval-96) Dadas as afirmativas a seguir:
I) $x^5 - 1 = (x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$
II) $x^5 - 1 = (x - 1)\left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right)$
III) $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

IV) $x^5 - 1 = (x^3 + 1)(x^2 - 1)$

V) $x^5 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1)(x - 1)$

Quantas são verdadeiras:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

**30)** (Colégio Naval-05) Sabendo-se que a equação $x^2(x^2 + 13) - 6x(x^2 + 2) + 4 = 0$ pode ser escrita como um produto de binômios do primeiro grau, a soma de duas das raízes reais distintas é igual a

a) $-3$ b) $-2$ c) $-1$ d) 2 e) 3

**31)** (Colégio Naval-08) Sabe-se que $a^3 - 3a + 1 = 93$ e $K = a^4 - 6a + 1$. Logo, K também pode ser expresso por.

a) $3a^2 + 86a + 1$ b) $3a^2 + 84a + 1$ c) $6a^2 + 86a + 1$

d) $6a^2 + 84a + 1$ e) $9a^2 + 86a + 1$

**32)** (AFA-99) Se $x + \frac{1}{x} = 2$, então, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é igual a

a) 1. b) 2. c) 6. d) 8.

**33)** (Olimpíada do Ceará-92) Determine todos os valores reais de x, y e z que satisfazem a igualdade $3x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2xz$.

**34)** (Olimpíada de Campina Grande-00) Se a, b e c são números, então $a^2c + ab^2 + bc^2 - a^2b - b^2c - ac^2$ é igual a:

A) (a-b)(b-c)(c+a) B) (b-a)(b-c)(c+a)

C) (a-b)(b-c)(c-a) D) (a-b)(b+c)(c-a)

E) (a+b)(b+c)(c+a)

**35)** (Olimpíada de Campina Grande-01) Se a, b, c são números reais tais que $a + b + c = 0$. Mostre que $2(a^4 + b^4 + c^4)$ é um quadrado perfeito.

**36)** (Olimpíada de Campina Grande-04) Se x, y e z são reais distintos tais que $x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x$, mostre que $(x + y)(y + z)(z + x) = 1$.

**37)** (Olimpíada de Minas Gerais-06) Se a e b são números tais que $a + b = 17$ e $a^3 + b^3 = 1241$. Então $a^2 + b^2$ é igual a:

a) 145 b) 73 c) 112 d) 55

**38)** Dado que $a + b = c + d$ e $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ prove que $a^{2011} + b^{2011} = c^{2011} + d^{2011}$.

**39)** (Olimpíada do Pará-11) Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$ e $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$. Calcule o valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

**40)** (Olimpíada da Argentina-98) Sejam x, y, números reais tais que $x + y = 26$, $x^3 + y^3 = 5408$. Calcular $x^2 + y^2$.

**41)** (Olimpíada de Quebec-95) Consideremos as equações $xy = p$, $x + y = s$, $x^{1993} + y^{1993} = t$, $x^{1994} + y^{1994} = u$. Determine uma expressão, em termos de p, s, t, u, de $x^{1995} + y^{1995}$.

**42)** (AIME-90) Calcule $ax^5 + by^5$ se os números reais a, b, x e y satisfazem as equações $ax + by = 3$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 16$ e $ax^4 + by^4 = 42$.

**43)** (Olimpíada Apics-83) Dados os números x, y, z tais que: $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + x^2 = 2$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Calcule $x^4 + y^4 + z^4$.

**44)** (OBM-12) Considere os números reais $a$ e $b$ tais que $(a + b)(a + 1)(b + 1) = 2$ e $a^3 + b^3 = 1$. Encontre o valor de $a + b$.

**45)** (Torneio Internacional das Cidades-94) Sejam a, b, c, d números reais tais que $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$. Prove que a soma de um par destes números é igual a zero.

**46)** (OBM-06) Sejam $a$ e $b$ números reais distintos tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$.
a) Determine o valor de $a + b$.
b) Determine o valor de $ab$.

**47)** (3ª Lista Treinamento Cone Sul-03) Sejam a, b, c e d números reais tais que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Determine o valor de $ab + cd$.

**48)** (Olimpíada do Ceará-97) Sejam a, b, c, números reais positivos distintos dois a dois tais que $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Prove que o produto $(a - c)(b - c)$ é negativo.

**49)** (OBM-10) Sejam $a$, $b$ e $c$ reais tais que $a \neq b$ e $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2010$. Calcule $c^2(a + b)$.

**50)** (OBM-07) Sejam $a$, $b$ e $c$ números tais que

$$a^2 - ab = 1 \qquad b^2 - bc = 1 \qquad c^2 - ac = 1$$

O valor de $abc \cdot (a + b + c)$ é igual a:
A) 0 B) 1 C) 2 D) −1 E) −3

**51)** (OBM-12) Se $x$ e $y$ são números reais tais que $x^3 + y^3 = 5(x + y)$. $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y \neq 0$, determine o valor de $xy$.
A) 4 B) 3 C) 1 D) 0 E) – 1

**52)** (Online Math Open-12) Sejam a e b números reais que satisfazem:
$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 900 \quad \text{e} \quad a^2 + ab + b^2 = 45.$$
Determine o valor de 2ab.

**53)** Mostre que $(a + b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2$.

**54)** Prove que se $a + b + c = 0$ então $\dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

**55)** Dado $a + b + c + d = 0$, prove que $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + bcd + cda + dab)$.

**56)** (IMO Shortlist-71) Sabendo que o sistema $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 35 \end{cases}$, possui uma solução x, y, z para a qual $x^2 + y^2 + z^2 < 10$, determine o valor de $x^5 + y^5 + z^5$.

**57)** Dado que $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$, prove que para todo número natural n:
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1} = (a + b + c)^{2n+1}.$$

**58)** (OBM-12) Sendo $a$, $b$, $c$ reais tais que $ab(a + b + c) = 1001$, $bc(a + b + c) = 2002$ e $ca(a + b + c) = 3003$, encontre $abc$.

**59)** (Olimpíada da Índia-12) Mostre que para todos os números reais x, y, z tais que $x + y + z = 0$ e $xy + yz + zx = -3$, a expressão $x^2y + y^2z + z^2x$ é constante.

**60)** (IMO-79) Os números reais não negativos $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ e $a$ satisfazem as seguintes relações: $\begin{cases} 1.x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4 + 5.x_5 = a \\ 1^3.x_1 + 2^3.x_2 + 3^3.x_3 + 4^3.x_4 + 5^3.x_5 = a^2 \\ 1^5.x_1 + 2^5.x_2 + 3^5.x_3 + 4^5.x_4 + 5^5.x_5 = a^3 \end{cases}$.
Quais são os possíveis valores de a?
Dica: Desenvolva a soma $\sum_{k=1}^{n} k(a - k^2)^2 x_k$

## MDC e MMC de polinômios

1) Calcular o MDC e o MMC entre $x^3 + x^2 - x - 1$ e $x^3 - x^2 - x + 1$.

2) (ESSA-76) O MDC das expressões $x^3 - 4x$ e $x^2 - 5x - 14$ é:
(A) $x - 7$ (B) $x(x + 2)$ (C) $x + 2$ (D) $(x + 2)(x - 2)$

3) (ESSA-78) O MDC entre $(2x)$, $(2x + 2)$ e $(x^2 + 2x + 1)$ é:
(A) 1 (B) 2 (C) $2x$ (D) $(x + 1)$

4) (ESSA-87) Sejam os polinômios $P = x^3 - 4x$, $Q = x^4 + 4x^3 + 4x^2$ e $R = x^2 - 4x + 4$. Dividindo-se o MMC de P e Q pelo MDC de P e R e considerando $x \neq 2$, obtemos a expressão:

(A) $x^2 (x + 2)^2$ (B) $\frac{x(x+2)}{x-2}$ (C) $x(x + 2)(x - 2)$

(D) $x^2(x + 2)(x - 2)$ (E) $\frac{x^2(x+2)}{x-2}$

5) (ESSA-04) O m.m.c. dos polinômios $x^2 + x^2y + x^3 + 2x^2y + xy^2$ e $y^3 + xy^2$ é:
a) $x^6y^2 + 2x^3y + xy^2$ b) $xy^2 + 2x^2y^3 + x^2y^3$
c) $x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4$ d) $x^6y^2 + 2x^3y^3 + xy^4$
e) $x^2y^3 + 2xy^3 + x^2y^2$

6) (Colégio Naval-59) Achar o MDC entre $x^3 + 2x^2 - 3x$ e $2x^3 + 5x^2 - 3x$.

7) (Colégio Naval-77) O mdc dos polinômios $x^3 - 5x^2 + 6x$ e $x^3 - 3x^2 + 2x$ é:
(A) $x^2 - 3x$ (B) $x^2 - 2x$ (C) $x^2 + 2x$ (D) $x - 2$ (E) $x$

8) (Colégio Naval-82) Para valores de x inteiros e $x \geq 2$, os inteiros P e Q têm para expressões $P = x^2 + 2x - 3$ e $Q = ax^2 + bx + c$ e o produto do máximo divisor comum pelo mínimo múltiplo comum desses números, P e Q dá $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$. A soma de a, b e c é:

a) 0 b) 8 c) 6 d) 2 d) 2 e) 1

9) (FGV-09) Seja $P(x) = x^2 + bx + c$, com b e c inteiros. Se $P(x)$ é fator de $T(x) = x^4 + 6x^2 + 25$ e de $S(x) = 3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$, então, $P(1)$ é igual a
A) 0. B) 1. C) 2. D) 3. E) 4.

**10)** (Olimpíada do Ceará-86) Se a é um número inteiro positivo qualquer, mostre que a fração $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ é irredutível.

**11)** (IME-56) Dadas as equações
(i) $x^4 - 16x^3 + 89x^2 - 206x + 168 = 0$
(ii) $x^4 - 16x^3 + 91x^2 - 216x + 180 = 0$
(iii) $x^4 - mx^3 + nx^2 - 462x + 432 = 0$
Determinar:
a) As raízes comuns das equações (i) e (ii)
b) Os valores de m e n da equação (iii), sabendo que ela admite as raízes determinadas no item (a).

**12)** (Colégio Naval-56) O mdc de $5xy^2, 15x^3$ e $17x^5y^4$ é:

**13)** (Colégio Naval-53) Determinar o mdc das expressões: $x^2 - 1$ e $x^2 + 2x - 3$.

**14)** (EsPCEx-53) Calcular o mdc entre entre $x^2 + 2x + 1$ e $x^3 + 1$.

**15)** (Colégio Nacal-53) Achar o mdc entre $x^3 + 2x^2 - 3x$ e $2x^3 + 5x^2 - 3x$.

**16)** Se $(x + 3)(x - 2)$ é o mdc dos polinômios $f(x) = (x + 3)(2x^2 - 3x + a)$ e $g(x) = (x - 2)(3x^2 + 10x - b)$ determine os valores de a e b.

**17)** Determine mdc $(x^3 - 6x^2 + 14x - 15, x^3 - 8x^2 + 21x - 18)$.

**18)** Determinar mdc $(x^6 + x^5 + x^3 + x + 1, x^4 + x^2 + 1)$.

**19)** Sejam m e n inteiros positivos. Demonstre que:
$$\text{mdc}\,(x^m + 1, x^n + 1) = x^{\text{mdc}\,(m,\,n)} + 1.$$

**20)** Determine mdc $(x^{100} - 1, x^{80} - 1)$.

# FRAÇÕES ALGÉBRICAS

## 7.1. DEFINIÇÕES

Uma fração é dita algébrica quando pelo menos um de seus termos, numerador ou denominador, são expressões algébricas. A forma mais comum de representar uma fração algébrica com numerador A e denominador B, é dada por $\frac{A}{B}$. Também são usadas, em menor escala, as notações A/B e A:B. Assim, são exemplos de frações algébricas: $\frac{x^2+y^2}{x+y}$, $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$, $\frac{3ab^2+2a^2c-5bc^2}{3a^2-8ab+9c^2}$ e $\frac{1}{x.y}$.

## 7.2. TRANSFORMAÇÕES

As transformações que podem ser aplicadas nas frações algébricas são baseadas no fato de que uma fração algébrica não se altera quando os seus dois membros são multiplicados ou divididos pela mesma expressão ou número (não nulo). Em linguajar matemático:

$$\frac{A}{B}=\frac{A.C}{B.C} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{B}=\frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{C}}, C\neq 0.$$

As frações $\frac{A}{B}$ e $\frac{A.C}{B.C}$ são denominadas **frações equivalentes**, pois apresentam o mesmo valor numérico para quaisquer valores das variáveis presentes nas expressões algébricas de A, B e C.

**7.2.1. Simplificação:** Consiste em dividir o numerador e o denominador da fração pelo máximo divisor comum destes termos. Por exemplo, na fração algébrica $\frac{24a^3b^5c^4}{36a^2b^4c^6}$ observa-se que o mdc entre o numerador e o denominador vale $12a^2b^4c^4$. Assim, pode-se simplificar esta fração da seguinte forma:

$$\frac{24a^3b^5c^4}{36a^2b^4c^6}=\frac{\frac{24a^3b^5c^4}{12a^2b^4c^4}}{\frac{36a^2b^4c^6}{12a^2b^4c^4}}=\frac{2ab}{3c^2}$$

Em alguns casos, a determinação do mdc demanda um processo de fatoração mais longo. Por exemplo, na fração algébrica $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$ é

necessário fatorar o numerador e o denominador utilizando o processo de fatoração por grupamento:

numerador: $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = abx^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy =$

$= (abx^2 + a^2xy) + (aby^2 + b^2xy) = ax(bx + ay) + by(ay + bx) = (ay + bx)(ax + by)$

denominador: $ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2) = abx^2 - aby^2 + a^2xy - b^2xy =$

$= (abx^2 + a^2xy) - (aby^2 + b^2xy) = ax(bx + ay) - by(ay + bx) = (ay + bx)(ax - by)$

Desta forma, o mdc entre o numerador e o denominador vale $ay + bx$ e o fração pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)} = \frac{\cancel{(ay+bx)}(ax+by)}{\cancel{(ay+bx)}(ax-by)} = \frac{ax+by}{ax-by}$$

## Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-06) Simplificando-se a fração $\frac{a^4 + b^4 - 6a^2b^2}{a^2 - b^2 + 2ab}$, onde $a > b$, obtém-se

a) $a^2 - b^2 - 2ab$ b) $a^2 - b^2 + 2ab$ c) $a^2 + b^2 - 2ab$ d) $a^2 + b^2 + 2ab$ e) $a^2 + b^2$

**Solução: Alternativa A**

$$\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab} = \frac{(a^4-2a^2b^2+b^4)-4a^2b^2}{a^2-b^2+2ab} = \frac{(a^2-b^2)^2-(2ab)^2}{a^2-b^2+2ab} =$$

$$= \frac{\cancel{(a^2-b^2+2ab)}(a^2-b^2-2ab)}{\cancel{a^2-b^2+2ab}} = a^2 - b^2 - 2ab$$

2) (Colégio Naval-91) Simplificando a expressão abaixo, para os valores de **a**, **b** e **c** que não anulam o denominador, obtém-se:

$$\frac{(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a + b - c)}{(a + b + c)(a^2 + c^2 - 2ac - b^2)}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) $a + b + c$ e) $a - b + c$

**Solução: Alternativa A**

$$\frac{|a^2-(b^2+c^2+2bc)|(a+b-c)}{(a+b+c)|(a^2+c^2-2ac)-b^2|} = \frac{[a^2-(b+c)^2](a+b-c)}{(a+b+c)|(a-c)^2-b^2|} = \frac{\cancel{(a+b+c)}\cancel{(a-b-c)}\cancel{(a+b-c)}}{\cancel{(a+b+c)}\cancel{(a+b-c)}\cancel{(a-b-c)}} = 1$$

3) (Colégio Naval-83) $\frac{(zx^2 + y^2z + 2xyz)(x^2 - y^2)}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$ é igual a:

a) $z(x + y)$ c) $zx + y$ e) $z + y$

b) $z(x - y)$ d) $zx - y$

**Solução: Alternativa B**

$$\frac{(zx^2+y^2z+2xyz)(x^2-y^2)}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}=\frac{z(x^2+y^2+2xy)(x-y)(x+y)}{(x+y)^3}=$$

$$=\frac{z(x+y)^2(x-y)(x+y)}{(x+y)^3}=\frac{z\cancel{(x+y)^3}(x-y)}{\cancel{(x+y)^3}}=z(x-y)$$

**4)** (Colégio Naval-07) Simplificando-se a fração $\frac{x\left(x^2+x-y\right)+y^2(y+1)}{x^2+y^2-xy}$, onde $x^2+y^2-xy\neq 0$, obtém-se:

a) $x-y+1$ b) $x-y-1$ c) $x+y-1$

d) $1+x+y$ e) $1-x+y$

**Solução: Alternativa D**

$$\frac{x(x^2+x-y)+y^2(y+1)}{x^2+y^2-xy}=\frac{x^3+x^2-xy+y^3+y^2}{x^2+y^2-xy}=\frac{(x^3+y^3)+(x^2+y^2-xy)}{x^2+y^2-xy}=$$

$$=\frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)+(x^2+y^2-xy)}{x^2+y^2-xy}=\frac{\cancel{(x^2+y^2-xy)}(x+y+1)}{\cancel{x^2+y^2-xy}}=x+y+1$$

**5)** Se $a^3+b^3+c^3=0$, simplifique a fração $\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc}$.

**Solução:**

Sabe-se que $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$

Como $a^3+b^3+c^3=0$ segue que $(a+b+c)^3=(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc \Rightarrow$

$$\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc}=1$$

**6)** Simplificar a fração algébrica $\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{9(x-y)(y-z)(z-x)}$.

**Solução:**

Sejam $a=x-y$, $b=y-z$ e $c=z-x$. Note que $a+b+c=0$.

Sabe-se que se $a+b+c=0$ então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Desfazendo a substituição: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x) \Rightarrow$

$$\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{3(x-y)(y-z)(z-x)}=1 \Rightarrow \frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{9(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{1}{3}$$

**7.2.2. Redução ao mesmo denominador**: De modo que duas ou mais frações sejam transformadas em frações equivalentes com o mesmo denominador procede-se da seguinte maneira.: o denominador de todas as frações passa a ser o mínimo múltiplo comum de todos os denominadores das frações originais e o numerador de cada uma das frações é igual à multiplicação entre o numerador original e o quociente da divisão entre o mmc de todos os denominadores e o denominador original. Em simbologismo matemático, reduzindo as frações algébricas $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$, ..., $\frac{A_n}{B_n}$ ao mesmo denominador obtém-se, respectivamente, as frações:

$$\frac{A_1 \dfrac{mmc(B_1,B_2,....,B_n)}{B_1}}{mmc(B_1,B_2,...,B_n)}, \quad \frac{A_2 \dfrac{mmc(B_1,B_2,....,B_n)}{B_2}}{mmc(B_1,B_2,...,B_n)}, \quad ..., \quad \frac{A_n \dfrac{mmc(B_1,B_2,....,B_n)}{B_n}}{mmc(B_1,B_2,...,B_n)}.$$

Por exemplo, observando as frações algébricas $\frac{7a^2bc^3}{12x^4y^2z^3}$, $\frac{5a^3b^2c}{16x^3y^4z^3}$ e $\frac{ab^4c^2}{18x^2y^5z^5}$, inicialmente determina-se o mmc entre seus denominadores, que vale $144x^4y^5z^5$. Assim, pode-se reduzir estas três frações ao mesmo denominador do seguinte modo:

$$\frac{7a^2bc^3}{12x^4y^2z^3} = \frac{7a^2bc^3 \dfrac{144x^4y^5z^5}{12x^4y^2z^3}}{144x^4y^5z^5} = \frac{(7a^2bc^3)(12y^3z^2)}{144x^4y^5z^5} = \frac{98a^2bc^3y^3z^2}{144x^4y^5z^5}$$

$$\frac{5a^3b^2c}{16x^3y^4z^3} = \frac{5a^3b^2c \dfrac{144x^4y^5z^5}{16x^3y^4z^3}}{144x^4y^5z^5} = \frac{(5a^3b^2c)(9xyz^2)}{144x^4y^5z^5} = \frac{45a^3b^2cxyz^2}{144x^4y^5z^5}$$

$$\frac{ab^4c^2}{18x^2y^5z^5} = \frac{ab^4c^2 \dfrac{144x^4y^5z^5}{18x^2y^5z^5}}{144x^4y^5z^5} = \frac{(ab^4c^2)(8x^2)}{144x^4y^5z^5} = \frac{8ab^4c^2x^2}{144x^4y^5z^5}$$

## 7.3. OPERAÇÕES

**7.3.1. Adição:** Existem dois casos a considerar na adição de duas ou mais frações algébricas.

**1° caso:** Todas as frações possuem o mesmo denominador D.

Nesta situação, o resultado da soma destas frações algébricas é uma fração algébrica cujo denominador é D e cujo numerador é igual à soma dos numeradores das frações que compõe a soma. É sempre importante observar se é possível simplificar a fração algébrica representada pela soma.

$$\frac{A_1}{D}+\frac{A_2}{D}+\ldots+\frac{A_n}{D}=\frac{A_1+A_2+\ldots+A_n}{D}$$

Observe os exemplos abaixo:

1) $\dfrac{a^2+2^2b}{a+b}+\dfrac{3ab-2a^2}{a+b}=\dfrac{a^2+2b^2+3ab-2a^2}{a+b}=\dfrac{2b^2-a^2+3ab}{a+b}$, $a+b\neq 0$

2) $\dfrac{x^2}{x^3-1}+\dfrac{x}{x^3-1}+\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}=\dfrac{\cancel{x^2+x+1}}{(x-1)(\cancel{x^2+x+1})}=\dfrac{1}{x-1}$, $x\neq 1$.

) $\dfrac{a+b+c}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\dfrac{ab+ac+bc}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\dfrac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}=$

$=\dfrac{abc+ab+ac+bc+a+b+c+1}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\dfrac{\cancel{(a+1)(b+1)(c+1)}}{\cancel{(a+1)(b+1)(c+1)}}=1$

**2° caso:** As frações não possuem o mesmo denominador.

Quando as frações não possuírem todas o mesmo denominador, deve-se reduzi-las ao mesmo denominador e depois aplicar a regra da soma do 1° caso. Analogamente ao 1° caso, deve-se observar se é possível simplificar a fração final.

$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}+\ldots+\frac{A_n}{B_n}=\frac{A_1\dfrac{mmc(B_1,B_2,\ldots,B_n)}{B_1}+A_2\dfrac{mmc(B_1,B_2,\ldots,B_n)}{B_2}+\ldots+A_n\dfrac{mmc(B_1,B_2,\ldots,B_n)}{B_n}}{mmc(B_1,B_2,\ldots,B_n)}$$

Toda expressão algébrica pode ser interpretada como uma fração cujo denominador é igual a 1. Por exemplo:

$$x=\frac{x}{1},\quad x^4-3x^3+x^2+6x-9=\frac{x^4-3x^3+x^2+6x-9}{1}.$$

Assim, em uma adição envolvendo expressões polinomiais e frações algébricas, basta tomar como denominador das expressões polinomiais o número 1 e efetuar normalmente a adição.

Os exemplos abaixo mostrarão a aplicação da regra da adição:

## Exercícios Resolvidos

1) $\dfrac{1}{x^2y}-\dfrac{3}{xy^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{1^{\,\mathrm{mmc}(x^2y,xy^2,x^3)}-3^{\,\mathrm{mmc}(x^2y,xy^2,x^3)}+2^{\,\mathrm{mmc}(x^2y,xy^2,x^3)}}{\mathrm{mmc}(x^2y,xy^2,x^3)}=$

$=\dfrac{1^{\,x^3y^2}-3^{\,x^3y^2}+2^{\,x^3y^2}}{x^3y^2}=\dfrac{xy-3x^2+2y^2}{x^3y^2}$

2) $2+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2}{1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2^{\,(x+1)}+(x-1)^{\,\cancel{(x+1)}}}{1\qquad\cancel{(x+1)}}=\dfrac{2x+2+x-1}{x+1}=\dfrac{3x+1}{x+1}$

3) $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=$

$=\dfrac{2^{\,\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x+1)}\,(x-2)}+1^{\,\cancel{(x-1)}\,(x+1)\,\cancel{(x-2)}}}{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x+1)}\qquad\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-2)}}=$

$=\dfrac{2(x-2)+1(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\dfrac{2(x-2)+1(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\dfrac{3x-3}{(x-1)(x+1)(x-2)}=$

$=\dfrac{3\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)(x-2)}=\dfrac{3}{x^2-x-2}$

4) Para efetuar a soma $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$ deve-se inicialmente notar que:

$\mathrm{mmc}[a(a-b)(a-c),\ b(b-a)(b-c),\ c(c-a)(c-b)]=abc(a-b)(a-c)(b-c).$

Assim: $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}=$

$$= \frac{abc(a-b)(a-c)(b-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{abc(a-b)(a-c)(b-c)}{b(b-a)(b-c)} + \frac{abc(a-b)(a-c)(b-c)}{c(c-a)(c-b)} = \frac{}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{\cancel{a}bc\cancel{(a-b)}\cancel{(a-c)}(b-c)}{\cancel{a}\cancel{(a-b)}\cancel{(a-c)}} - \frac{a\cancel{b}c\cancel{(b-a)}(a-c)\cancel{(b-c)}}{\cancel{b}\cancel{(b-a)}\cancel{(b-c)}} + \frac{ab\cancel{c}(a-b)\cancel{(c-a)}\cancel{(c-b)}}{\cancel{c}\cancel{(c-a)}\cancel{(c-b)}} = \frac{}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{bc(b-c)+a(-ac+c^2+ab-b^2)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{bc(b-c)+a(b-c)(a-b-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(b-c)[bc+a(a-b-c)]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(b-c)(a^2-ab-ac+bc)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{\cancel{(a-b)}\cancel{(a-c)}\cancel{(b-c)}}{abc\cancel{(a-b)}\cancel{(a-c)}\cancel{(b-c)}} = \frac{1}{abc}$$

Para calcular o valor de $\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}$, com $x + y + z = 0$, inicialmente deve-se substituir os denominadores por formas mais simples e depois fazer a soma das frações obtidas:

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x} = -\left(\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}\right) =$$

$$= \frac{-[(xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+xz(x^2+z^2)]}{xyz} =$$

$$= \frac{-x^3y-xy^3-y^3z-yz^3-x^3z-xz^3}{xyz} = \frac{-x^3(y+z)-y^3(x+z)-z^3(x+y)}{xyz} =$$

$$= \frac{x^4+y^4+z^4}{xyz}$$

Logo, pode-se afirmar que, se $x + y + z = 0$:

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x} = \frac{x^4+y^4+z^4}{xyz}$$

**6)** É possível provar que $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$ sempre é o quadrado de uma expressão algébrica. Fazendo $x = \frac{1}{a-b}$, $y = \frac{1}{b-c}$ e $z = \frac{1}{c-a}$ então:

$\frac{1}{x} = a - b$, $\frac{1}{y} = b - c$ e $\frac{1}{z} = c - a$. Assim: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Desenvolvendo esta última expressão, segue que: $yz + zx + xy = 0$.

Portanto: $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = x^2 + y^2 + z^2 =$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = = (x + y + z)^2$, ou seja:

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2.$$

7) A partir dos resultados $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ e $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ é possível calcular o valor de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Desenvolvendo a soma de frações do segundo resultado:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

Elevando ao quadrado o primeiro resultado:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2(ayz + bxy + cxy)}{abc} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

8) Para $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$, pode-se demonstrar que, para um número x real qualquer, a expressão $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$ é constante.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} =$$

$$= \frac{(b-a)[x^2 - (a+b)x + ab] - (c-a)[x^2 - (a+c)x + ac] + (c-b)[x^2 - (b+c)x + bc]}{(b-a)(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{(b-a-c+a+c-b)^0 x^2 + (a^2 - b^2 + c^2 - a^2 + b^2 - c^2)^0 x + (b-a)ab - ac^2 + a^2c + bc^2 - b^2c}{(b-a)(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{(b-a)ab + (b-a)c^2 - c(b^2 - a^2)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{(b-a)(ab + c^2 - bc - ac)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{(b-a)[b(a-c) - c(a-c)]}{(b-a)(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = 1$$

9) $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(a-c)(b-c)}=\dfrac{a^4(b-c)-b^4(a-c)+c^4(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{a^4b-a^4c-ab^4+b^4c+c^4(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\dfrac{ab(a^3-b^3)-c(a^4-b^4)+c^4(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{ab(a-b)(a^2+ab+b^2)-c(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+c^4(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{(a-b)[ab(a^2+ab+b^2)-c(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+c^4]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{(a-b)[a^3b+a^2b^2+ab^3-a^3c-a^2bc-ab^2c-b^3c+c^4]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{(a-b)[(a^3b-a^2bc)+(a^2b^2-ab^2c)+(ab^3-b^3c)-(a^3c-c^4)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{(a-b)[a^2b(a-c)+ab^2(a-c)+b^3(a-c)-c(a-c)(a^2+ac+c^2)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{(a-b)[a^2b(a-c)+ab^2(a-c)+b^3(a-c)-c(a-c)(a^2+ac+c^2)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$:\dfrac{(a-b)(a-c)[a^2b+ab^2+b^3-a^2c-ac^2-c^3]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{(a-b)(a-c)[(a^2b-a^2c)+(ab^2-ac^2)+(b^3-c^3)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{(a-b)(a-c)[a^2(b-c)+a(b-c)(b+c)+(b-c)(b^2+bc+c^2)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{(a-b)(a-c)(b-c)[a^2+ab+ac+b^2+bc+c^2]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

$=\dfrac{\cancel{(a-b)(a-c)(b-c)}[a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc]}{\cancel{(a-b)(a-c)(b-c)}}=a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc \Rightarrow$

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^4}{(a-c)(b-c)}=a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$$

Escrevendo $a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$ como soma de quadrados perfeitos segue que:

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^4}{(a-c)(b-c)}=\frac{(a+c)^2+(a+b)^2+(b+c)^2}{2}$$

### 7.3.2. Subtração

A subtração entre frações é efetuada da mesma maneira que a subtração entre expressões algébricas. Logo, a subtração $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$ pode ser interpretada como a adição $\frac{A}{B}+\frac{-C}{D}$. Esta regra pode ser estendida para uma quantidade qualquer de termos na subtração. Abaixo é possível verificar uma situação envolvendo adições e subtrações com cinco frações:

$$\frac{A_1}{B_1}-\frac{A_2}{B_2}+\frac{A_3}{B_3}+\frac{A_4}{B_4}-\frac{A_5}{B_5}=\frac{A_1}{B_1}+\frac{-A_2}{B_2}+\frac{A_3}{B_3}+\frac{A_4}{B_4}+\frac{-A_5}{B_5}$$

## Exercícios Resolvidos

1) $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{3x}{x^2-2x+1}=\frac{x+1}{x(x-1)}+\frac{-3x}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)(x+1)-3x^2}{x(x-1)^2}=\frac{(x^2-1)-3x^2}{x(x-1)^2}=\frac{-2x^2-1}{x(x-1)^2}$

2) $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2-4}-\frac{3}{x+2}+\frac{x-1}{x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{-2x}{(x-2)(x+2)}+\frac{-3}{x+2}+\frac{x-1}{x(x+2)}=$

$=\frac{(x-2)(x+2)-2x.x-3x(x-2)+(x-1)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=$

$=\frac{x^2-4-2x^2-3x^2+6x+x^2-3x+2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{-3x^2+3x-2}{x(x-2)(x+2)}$

3) $5x^2-\frac{x^3-3x+1}{x-2}=\frac{5x^2}{1}+\frac{-(x^3-3x+1)}{x-2}=\frac{5x^2(x-2)-x^3+3x-1}{x-2}=$

$=\frac{5x^3-10x^2-x^3+3x-1}{x-2}=\frac{4x^3-10x^2+3x-1}{x-2}$

### 7.3.3. Multiplicação

Com relação à multiplicação de frações algébricas, há dois casos a considerar:

**1º caso**: Sejam A, B e C expressões algébricas. O produto de A pela fração algébrica B/C é efetuado da seguinte maneira:

$$A \times \frac{B}{C} = \frac{A \times B}{C}.$$

**2º caso**: Sejam A, B, C e D expressões algébricas. O produto entre as frações algébricas A/B e C/D é calculado da seguinte maneira:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}.$$

Os exemplos abaixo mostrarão a aplicação destas regras.

1) $(2x+5) \times \dfrac{4x-1}{2x^2+2x-1} = \dfrac{(2x+5)(4x-1)}{2x^2+2x-1} = \dfrac{8x^2+18x-5}{2x^2+2x-1}$

2) $\dfrac{x-y}{x^2+2xy+y^2} \times \dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2} = \dfrac{(x-y)(x^3+y^3)}{(x^2+2xy+y^2)(x^2-y^2)} =$

$= \dfrac{\cancel{(x-y)}\ \cancel{(x+y)}(x^2+y^2-xy)}{(x+y)^2\ \cancel{(x-y)}\ \cancel{(x+y)}} = \dfrac{x^2+y^2-xy}{(x+y)^2}$

**Obs:** Repare que neste exemplo não foi necessário efetuar nenhuma multiplicação, uma vez que, após os cancelamentos efetuados, sobrou apenas uma expressão algébrica, tanto no numerador quando no denominador.

3) $\dfrac{2x-y}{x+2y} \times \dfrac{x^2+3xy+2y^2}{2x^2-3xy+y^2} = \dfrac{(2x-y)(x^2+3xy+2y^2)}{(x+2y)(x^2-3xy+2y^2)} =$

$= \dfrac{(2x-y)(x+y)\cancel{(x+2y)}}{\cancel{(x+2y)}(x-2y)(x-y)} = \dfrac{2x^2+xy-y^2}{x^2-3xy-2y^2}$

**Obs:** Neste último exemplo o cancelamento efetuado diminui bastante o cálculo necessário para determinar o produto final.

4) Em algumas situações é necessário somar e multiplicar frações algébricas para determinar o resultado final:

$$\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2x^2y^2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{\cancel{x^2y^2}}{(x+y)^2}\left(\frac{x^2+y^2}{\cancel{x^2y^2}}\right)+\frac{2\cancel{(xy)^2}^{\,1}}{(x+y)^3}\left(\frac{x+y}{\cancel{xy}}\right)=$$

$$=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}+\frac{2xy\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)^3}^{\,2}}=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}+\frac{2xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2+y^2+2xy}{(x+y)^2}=\frac{\cancel{(x+y)^2}}{\cancel{(x+y)^2}}=1$$

5) $$\frac{(a+b)^2-(c+d)^2}{(a+c)^2-(b+d)^2}\times\frac{(a-b)^2-(d-c)^2}{(a-c)^2-(d-b)^2}=$$

$$=\frac{(a+b-c-d)(a+b+c+d)(a-b-d+c)(a-b+d-c)}{(a+c-b-d)(a+c+b+d)(a-c-d+b)(a-c+d-b)}=$$

$$=\frac{\cancel{(a+b-c-d)}\,\cancel{(a+b+c+d)}\,\cancel{(a-b+c-d)}\,\cancel{(a-b-c+d)}}{\cancel{(a-b+c-d)}\,\cancel{(a+b+c+d)}\,\cancel{(a+b-c-d)}\,\cancel{(a-b-c+d)}}=1$$

6) Considere a condição $\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=0$. Deseja-se calcular o valor de $\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}$. Neste exemplo, o produto de frações não aparece na expressão a ser encontrada, mas aparece na 1ª etapa da demonstração:

$$\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}+\frac{x}{y-z}\left(\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)+\frac{y}{z-x}\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{x-y}\right)+\frac{z}{x-y}\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}+\frac{x(x-y+z-x)+y(x-y+y-z)+z(z-x+y-z)}{(y-z)(z-x)(x-y)}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}+\frac{\cancel{-xy+xz+xy-yz-xz+yz}}{(y-z)(z-x)(x-y)}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}=0$$

### 7.3.4. Divisão

Se A, B, C e D são expressões algébricas, com $B \neq 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$, a divisão entre as frações A/B e C/D é dada por: $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$.

Alguns casos particulares podem ser determinados aplicando a regra geral. Quando uma fração $\frac{A}{B}$ é dividida por uma expressão algébrica C tem-se que:

$$\frac{A}{B} \div C = \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{1}} = \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{1}} = \frac{A}{B} \times \frac{1}{C} = \frac{A}{B \times C}.$$

Do mesmo modo, quando se divide uma expressão algébrica A por uma fração $\frac{B}{C}$ pode-se chegar ao resultado da seguinte forma:

$$A \div \frac{B}{C} = \frac{A}{B} = \frac{\frac{A}{1}}{\frac{B}{C}} = \frac{A}{1} \times \frac{C}{B} = \frac{A \times C}{B}$$

Note que na divisão de duas frações que possuam o mesmo denominador, é possível determinar o resultado final fazendo o cancelamento destes dois denominadores:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{B} = \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{B}} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A \times \cancel{B}}{\cancel{B} \times C} = \frac{A}{C}$$

Portanto, o resultado da divisão entre duas frações que possuem o mesmo denominador é uma fração cujo numerador é igual ao numerador da 1ª fração e o denominador é igual ao numerador da 2ª fração. Algebricamente pode-se proceder da seguinte maneira: $\frac{A}{B} \div \frac{C}{B} = \frac{\frac{A}{\cancel{B}}}{\frac{C}{\cancel{B}}} = \frac{A}{C}$

Observe os exemplos abaixo:

1) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a+b}{\cancel{ab}}}{\frac{b-a}{\cancel{ab}}} = \frac{a+b}{b-a}$

**2)** $\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{y}+1\right)}{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}=\dfrac{\left(\dfrac{1+x}{x}\right)\left(\dfrac{1+y}{y}\right)}{x(x+y)-y(x-y)}=\dfrac{\dfrac{(1+x)(1+y)}{xy}}{x^2+xy-xy+y^2}=\dfrac{\dfrac{(1+x)(1+y)}{xy}}{\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}}=$

$=\dfrac{(1+x)(1+y)}{xy}\times\dfrac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2}=\dfrac{(1+x)(1+y)(x-y)(x+y)}{xy(x^2+y^2)}$

**3)** $\dfrac{\dfrac{x-y}{x^3+y^3}}{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+2xy+y^2}}=\dfrac{\cancel{x-y}}{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)}\cdot\dfrac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{(x+y)\cancel{^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-xy+y^2}{x+y}}=$

$=\dfrac{1}{x^2-xy+y^2}\times\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{x+y}{(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}$

**4)** $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\div\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}\right)=\left(\dfrac{ab+ac+bc}{abc}\right)\div\left(\dfrac{a+b+c}{abc}\right)=\dfrac{\dfrac{ab+ac+bc}{\cancel{abc}}}{\dfrac{a+b+c}{\cancel{abc}}}=\dfrac{ab+ac+bc}{a+b+c}$

**5)** $\left[\dfrac{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}+\dfrac{2\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}\right]\div\left[\dfrac{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a}{a+2b}}{\dfrac{a}{a+2b}-\dfrac{a}{a+3b}}-\dfrac{a}{a+b}+a\right]=$

$=\left[\dfrac{a(a-b)-b(a+b)}{\cancel{(a+b)(a-b)}}+\dfrac{2(a+b)}{a}\right]\div\left[\dfrac{a(a+2b)-a(a+b)}{\cancel{(a+b)}(a+2b)}-\dfrac{a}{a+b}+a\right]=$

$=\left[\dfrac{a^2-ab-ab-b^2}{a^2-ab+ab+b^2}+\dfrac{2(a+b)}{b}\right]\div\left[\dfrac{a^2+2ab-a^2-ab}{a+b}-\dfrac{a}{a+b}+a\right]=$

$$= \left[\frac{a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2(a+b)b}{a^2+b^2}\right] \div \left[\frac{\cancel{ab}}{\frac{a+b}{\cancel{ab}}-\frac{a+3b}{a+b}+a}\right] =$$

$$= \left[\frac{a^2-2ab-b^2+2ab+2b^2}{a^2+b^2}\right] \div \left[\frac{a+3b}{a+b}-\frac{a+3b}{a+b}+a\right] = \left[\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right] \div a = 1 \div a = \frac{1}{a}$$

## Exercícios Resolvidos

1) (Olimpíada de Campina Grande-99) O valor de $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}}$ é igual a:

a) 3/4 b) 4/5 c) 5/6 d) 6/7 e) 6/5

**Solução:**

$$2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}} = 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}} = 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\frac{2}{3}}} = 2-\cfrac{1}{2-\frac{1}{\frac{4}{3}}} = 2-\cfrac{1}{2-\frac{3}{4}} = 2-\cfrac{1}{\frac{5}{4}} =$$

$$= 2-\frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

2) (Colégio Naval-96) Sejam A, B, C e D números naturais maiores que 1. Para que a igualdade $\cfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \cfrac{B}{\frac{A}{\frac{C}{D}}}$ seja verdade.

(A) $A^2 = \frac{B^3C}{D}$ (B) $B^2C = AD$ (C) $A^4 = B^4C^4$

(D) $\frac{A^2}{D^2} = \frac{B}{C}$ (E) $B^3 = C^2$

**Solução:**

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\frac{C}{D}} = \frac{B}{\left(\frac{C}{D}\right)^{A}} \Leftrightarrow \frac{A}{\frac{BC}{D}} = \frac{B}{\frac{AD}{C}} \Leftrightarrow \frac{A}{BC\not{D}} = \frac{BC}{A\not{D}} \Leftrightarrow A^2 = B^2C^2 \Rightarrow$$

$$(A^2)^2 = (B^2C^2)^2 \Rightarrow A^4 = B^4C^4$$

3) (EPCAr-03) Se a e b são números reais não nulos, então, simplificando a expressão $\left(a^2b + ab^2\right) \cdot \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$, obtém-se

a) a + b  b) $a^2 + ab + b^2$  c) $a^2 + b^2$  d) b – a

**Solução:**

$$\left(a^2b + ab^2\right) \cdot \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = ab(a+b)\frac{\frac{b^3 - a^3}{(ab)^3}}{\frac{b^2 - a^2}{(ab)^2}} = \cancel{ab}\ \cancel{(a+b)}\ \frac{\cancel{(b-a)}(b^2 + ab + a^2)}{\cancel{ab}\ \cancel{(b-a)}\ \cancel{(b+a)}} =$$

$$= a^2 + ab + b^2$$

4) Sabe-se que $\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}} + \sqrt[9]{\frac{a}{c}} + \sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}} = 0$. Calcule o valor de $\left(\frac{a}{\frac{b}{b}}{c}\right)^9$.

**Solução:**

Fazendo $x = \sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}}$, $y = \sqrt[9]{\frac{a}{c}}$ e $z = \sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}}$ tem-se que x + y + z = 0.

Sabe-se que se x + y + z = 0 então $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Rightarrow$

$$\left(\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}}\right)^3 + \left(\sqrt[9]{\frac{a}{c}}\right)^3 + \left(\sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}}\right)^3 = 3\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b^2}{c^2}} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{a}{c}} + \left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2 = 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2 - 2\sqrt[3]{\frac{a}{c}} + \left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} - \sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \left(\frac{a}{\frac{b}{b}}{c}\right)^9 = 1.$$

## 7.4. RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES IRRACIONAIS.

Algo muito frequente é a denominada racionalização de denominadores em Matemática. Diz-se que uma fração está *racionalizada* quando o seu denominador é um número racional, não nulo, obviamente. Racionalizar uma fração consiste em transformá-la numa fração equivalente racionalizada. Por exemplo as frações seguintes $\frac{5}{43}, \frac{\sqrt[3]{7}}{123}, \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{121}}, \frac{1-\sqrt[5]{5}}{1+2\sqrt{2}-\sqrt{8}}$ estão todas racionalizadas. Já as frações $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{12}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}}, \frac{7\sqrt{5}-2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}-2\sqrt[3]{5}}, \frac{3+e}{\pi+\varphi}$ não estão racionalizadas.

Para racionalizar uma fração nos casos mais simples, apresentados a seguir, utilizam-se duas propriedades básicas:

I. quando se multiplicam numerador e denominador de uma fração por um mesmo número real, **não nulo**, obtém-se uma fração *equivalente* à primeira;

II. $\sqrt[n]{a^n} = a$. A fim de aplicar tal fato, serão empregados alguns **produtos notáveis** fundamentais.

Tradicionalmente, dividem-se as técnicas de racionalização em vários casos. Aqui, serão resumidas em apenas três casos.

**1° CASO: Frações da forma $\frac{a}{c\sqrt[n]{b}}$, com $a \in R^*$, $b, c \in Q^*$ e n natural positivo.**

Basta multiplicar numerador e denominador pelo fator $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, também denominado **fator racionalizante**. De fato, é trivial que a fração $\frac{a}{c\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{c\sqrt[n]{b}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{c\sqrt[n]{b \cdot b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{cb}$ está racionalizada, pois bc é racional.

### Exercícios Resolvidos

1) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2) $\frac{10}{3\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

3) $\dfrac{-65+12\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\left(-65+12\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2}} = \dfrac{\left(-65+12\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[3]{16}}{4}.$

4) $\dfrac{\pi+\sqrt[5]{-7}}{99\sqrt[7]{2}} = \dfrac{\left(\pi+\sqrt[5]{-7}\right)\cdot\sqrt[7]{2^6}}{99\sqrt[7]{2}\cdot\sqrt[7]{2^6}} = \dfrac{\left(\pi+\sqrt[5]{-7}\right)\cdot\sqrt[7]{64}}{99\cdot 2} = \dfrac{\left(\pi+\sqrt[5]{-7}\right)\cdot\sqrt[7]{64}}{198}.$

**2º CASO: Frações da forma $\dfrac{a}{p\sqrt[n]{b}\pm q\sqrt[n]{c}}$, com a ∈ R*, p, q, b, c ∈ Q*, n natural positivo e denominador não nulo.**

Agora, é crucial utilizar o primeiro dos seguintes casos de fatoração (ou ainda, de produtos notáveis), válidos quaisquer que sejam x e y reais:

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}\right), \forall\ n \in \mathbb{N}^*;$$

$$x^n - y^n = (x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - x^2y^{n-3} + xy^{n-2} - y^{n-1}\right), \text{ com } n \text{ par};$$

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}\right), \text{ com } n \text{ ímpar}.$$

**Observações:**

1) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \leftrightarrow$ DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS. Com efeito, $(x-y)(x+y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2$.

2) $x^3 - y^3 = (x-y)(x+xy+y) \leftrightarrow$ DIFERENÇA DE DOIS CUBOS.
De fato, $x^3 - y^3 = = x^3 - x^2y + x^2y - y^3 = x^2(x-y) + y(x^2 - y^2) =$
$= x^2(x-y) + y(x-y)(x+y) = (x-y)[x^2 + y(x+y)] = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.

3) $x^3 + y^3 = (x+y)(x-xy+y) \leftrightarrow$ SOMA DE DOIS CUBOS.

4) Perceba-se que não se pode utilizar o mesmo raciocínio para tentar fatorar a SOMA DE DOIS QUADRADOS, pois n é par, e a segunda fatoração vale somente se n é ímpar. Em verdade, é fundamental saber que $x^2 + y^2 = (x+y)(x+y)$ não é uma identidade válida. Pode-se, porém, fazer:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - \left(\sqrt{2xy}\right)^2 = \left(x+y-\sqrt{2xy}\right)\left(x+y+\sqrt{2xy}\right).$$

5) $x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$. Alternativamente, poderia ser demonstrada assim:

$$x^4 - y^4 = \left(x^2\right)^2 - \left(y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = (x - y)(x + y)\left(x^2 + y^2\right) =$$
$$= (x - y)\left(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3\right).$$

6) $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$. Observe-se como os expoentes de x *decrescem* de 4 a 0, em cada termo no segundo fator, enquanto os de y *crescem* de 0 a 4, de tal sorte que, em cada monômio o grau seja constante e igual a $4 = 5 - 1$.

7) Como curiosidade, tem-se que $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$. As demonstrações destas duas últimas identidades ficam a cargo do leitor, como bons exercícios.

Agora, à racionalização. A ideia consiste em utilizar um dos três produtos notáveis acima. Em verdade, tem-se que:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{c}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{c}} \cdot \frac{\left[\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2}\sqrt[n]{c} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{c}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt[n]{c}\right)^{n-1}\right]}{\left[\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2}\sqrt[n]{c} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{c}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt[n]{c}\right)^{n-1}\right]} =$$
$$= \frac{a\left[\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2}\sqrt[n]{c} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{c}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt[n]{c}\right)^{n-1}\right]}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n - \left(\sqrt[n]{c}\right)^n} =$$
$$= \frac{a\left[\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2}\sqrt[n]{c} + \left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{c}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt[n]{c}\right)^{n-1}\right]}{b - c}.$$

Note que, como $b - c$ é racional, esta última fração possui denominador racional e, portanto, pode ser considerada racionalizada.

Analogamente, caso n seja par, tem-se que:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}=\frac{a}{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}\cdot\frac{\left[\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}-\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2}\sqrt[n]{c}+\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{c}\right)^{2}-\ldots-\left(\sqrt[n]{c}\right)^{n-1}\right]}{\left[\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}-\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2}\sqrt[n]{c}+\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{c}\right)^{2}-\ldots-\left(\sqrt[n]{c}\right)^{n-1}\right]}=$$

$$=\frac{a\left[\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}-\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2}\sqrt[n]{c}+\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{c}\right)^{2}-\ldots-\left(\sqrt[n]{c}\right)^{n-1}\right]}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n}-\left(\sqrt[n]{c}\right)^{n}}=$$

$$=\frac{a\left[\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}-\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-2}\sqrt[n]{c}+\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-3}\left(\sqrt[n]{c}\right)^{2}-\ldots-\left(\sqrt[n]{c}\right)^{n-1}\right]}{b-c}.$$

## Exercícios Resolvidos

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^{2}-\sqrt{2}^{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\left(2+\sqrt{2}\right)}{2^{2}-\sqrt{2}^{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}.$

3) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}-1}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}-1}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{7^{2}}+\sqrt[3]{7}\cdot 1+1^{2}}{\sqrt[3]{7^{2}}+\sqrt[3]{7}\cdot 1+1^{2}}=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1\right)}{\sqrt[3]{7}^{3}-1^{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1\right)}{6}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1}{3}.$

4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{3}^{3}-\sqrt[4]{3}^{2}\cdot\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{2}^{2}-\sqrt[4]{2}^{3}}{\sqrt[4]{3}^{3}-\sqrt[4]{3}^{2}\cdot\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{2}^{2}-\sqrt[4]{2}^{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{3}^{4}-\sqrt[4]{2}^{4}}=\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{8}.$

5) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{3}^{4}-\sqrt[5]{3}^{3}\cdot\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{3}^{2}\cdot\sqrt[5]{2}^{2}-\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{2}^{3}+\sqrt[5]{2}^{4}}{\sqrt[5]{3}^{4}-\sqrt[5]{3}^{3}\cdot\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{3}^{2}\cdot\sqrt[5]{2}^{2}-\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{2}^{3}+\sqrt[5]{2}^{4}}=$

$$= \frac{\sqrt[5]{81} - \sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{3^5} + \sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{81} - \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} - \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}}{5}.$$

6) $$\frac{\sqrt[10]{2}}{4 + 2\sqrt[5]{5} + \sqrt[5]{25}} = \frac{\sqrt[10]{2}}{2^2 + 2\sqrt[5]{5} + \sqrt[5]{5^2}} \cdot \frac{2 - \sqrt[5]{5}}{2 - \sqrt[5]{5}} = \frac{\sqrt[10]{2}\left(2 - \sqrt[5]{5}\right)}{2^3 - \sqrt[5]{5^3}} = \frac{\sqrt[10]{2}\left(2 - \sqrt[5]{5}\right)}{3}.$$

**3º CASO: Frações da forma $\frac{a}{p\sqrt[n]{b} \pm q\sqrt[m]{c}}$, com a ∈ R*, p, q, b, c ∈ Q*, m, n naturais positivos e denominador não nulo.**

Nesta situação, reduzem-se os radicais a um mesmo índice e aplicam-se as idéias anteriores.

## Exercícios Resolvidos

1) $$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{9}} \cdot \frac{\sqrt[6]{8^5} - \sqrt[6]{8^4}\cdot\sqrt[6]{9} + \sqrt[6]{8^3}\cdot\sqrt[6]{9^2} - \sqrt[6]{8^2}\cdot\sqrt[6]{9^3} + \sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{9^4} - \sqrt[6]{9^5}}{\sqrt[6]{8^5} - \sqrt[6]{8^4}\cdot\sqrt[6]{9} + \sqrt[6]{8^3}\cdot\sqrt[6]{9^2} - \sqrt[6]{8^2}\cdot\sqrt[6]{9^3} + \sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{9^4} - \sqrt[6]{9^5}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{9} - 2\cdot 3 + \sqrt{2}\cdot 3\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{9}}{8 - 9} = 3\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[6]{72} + 6 - 2\sqrt[6]{648} + 4\sqrt[3]{3} - 4\sqrt{2}.$$

2) $$\frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \left(2 + \sqrt{3}\right)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Alternativamente:

$$\frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{1}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Cabe salientar que:

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3},$$

ou seja, ambos os resultados equivalem.

3) $\dfrac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\dfrac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\cdot\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\dfrac{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10-2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}}=$

$=\dfrac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\dfrac{2\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5^2-\sqrt{5}^2}=\dfrac{\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10}.$

Sob outro ponto de vista:

$\dfrac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\dfrac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\cdot\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\dfrac{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}}=\dfrac{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}=$

$=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}}{5}.$

Mais uma vez, os resultados são em verdade iguais. De fato.

$\dfrac{\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}}=\dfrac{10}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}}=\dfrac{\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}\cdot\dfrac{10+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=$

$=\dfrac{\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{80}{5\left(10+2\sqrt{5}\right)^2}}=\dfrac{\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}\cdot\dfrac{4}{10+2\sqrt{5}}=1.$

4) (UFRRJ -00) Encontre o valor da expressão mostrada na figura a seguir

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}\cdot 0,666...}+\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^{0}-\frac{1}{1,333...}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

**Solução:**

$\left[\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-3}\cdot 0,666...}+\sqrt{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{0}-\dfrac{1}{1,333...}}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{6^3\cdot\dfrac{6}{9}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{9}}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{\dfrac{6^4}{9}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$=\left(\dfrac{6^2}{3}+\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(12+\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(12+\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{25}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{2}{25}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{25}}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}.$

Assim, a expressão vale $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

5) (UFC-99) Sejam $A = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, então, A + B é igual a

a) $-2\sqrt{2}$. b) $3\sqrt{2}$. c) $-2\sqrt{3}$. d) $3\sqrt{3}$. e) $2\sqrt{3}$.

**Solução:**

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Portanto, A + B = $2\sqrt{3}$.

7) (IME-71) Mostrar que $\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}, \forall x \in [-1,1], x \neq 0.$

**Solução:**

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{2+x}^2-\sqrt{2-x}^2\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}^2-\sqrt{1-x}^2\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \frac{2x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}.$$

**OBS:** A questão original pedia o cálculo de $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

8) (CN-89) O valor da expressão $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+10}$, é

a) – 10 b) – 9 c) $\frac{1}{9}$ d) 9 e) 10

**Solução:**

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+10} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{10+\sqrt{99}} \cdot \frac{10-\sqrt{99}}{10-\sqrt{99}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} + \ldots + \frac{10-\sqrt{99}}{10^2-\sqrt{99}^2} =$$

$$\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\ldots+10-\sqrt{99} = 10-1 = 9.$$

## 7.5. REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Como é sabido, o sistema de (base de) numeração decimal utiliza-se de:

a) **dez símbolos**, denominados *algarismos*, para representar qualquer número natural.

b) sistema **posicional** de representação em que cada número escrito vale 10 vezes mais que valeria caso estivesse na posição imediatamente à direita da sua, ou, similarmente, 10 vezes menos do que valeria caso estivesse na posição imediatamente à esquerda da sua.

Desse modo, os números 1976 e 69024,11 devem ser entendidos, respectivamente, como as somas

$$(1.10^3 + 9.10^2 + 7.10^1 + 6.10^0) \quad \text{e}$$

$$(6.10^4 + 9.10^3 + 0.10^2 + 2.10^1 + 4.10^0 + 1.10^{-1} + 1.10^{-2}) =$$

$$= 6.10^4 + 9.10^3 + 0.10^2 + 2.10^1 + 4.10^0 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2}.$$

É fundamental lembrar que todo número escrito sob a forma decimal (isto é, com vírgula, explícita ou não, separando a parte inteira da fracionária) pode ser classificado em periódico ou não periódico. Assim, por exemplo, os números −24,696969...; 3,51673673673... e 4 = 4,0 = 4,000... são denominados dízimas periódicas, de períodos 69; 673 e 0, respectivamente, sendo a primeira e a última simples (porque logo após a vírgula vem o período) e a segunda composta (pelo fato de haver números não periódicos entre a vírgula e período, no caso 51, denominado *anteperíodo*). Observe-se que os números ditos decimais exatos, como 49,397 ou − 45,0 são também dízimas periódicas (simples ou compostas), uma vez que 49,397 = 49,397000... e − 45,0 = − 45,000.... Finalmente, há os números de representação decimal infinita **não periódica**, como 4,101100111000... (em que a quantidade de algarismos iguais a 1 e a 0 vão aumentando em uma unidade, à medida que vão aparecendo novamente) e π = 3,14159265... (a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro).

Demonstra-se que *todo* número racional pode ser escrito sob a forma de dízima periódica (finita ou infinita) e vice-versa, isto é, *toda* dízima **periódica** representa um número racional. Consequentemente, os números de **representação decimal infinita e não periódica não são racionais**.

A ideia, utilizando o algoritmo convencional da divisão euclidiana continuada, é a seguinte. Suponha-se que se divida um inteiro **p** qualquer por um inteiro **q**, não nulo, podem ser consideradas duas possibilidades gerais:

a) em algum momento, obtém-se resto **zero** (a divisão chega a um "fim"). Então, por definição de representação decimal, tem-se um número denominado **decimal exato**.

Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 127 & 50 \\ \hline 270 & 2.54 \\ 200 & \\ 0 & \end{array} \quad 2 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100}$$

Fim negrito, os restos da divisão por 5

Dada uma *fração ordinária* (isto é, um quociente entre dois inteiros) $\frac{p}{q}$ **irredutível** (isto é, com mdc(p, q) = 1), para obter-se uma *fração decimal* (ou seja, uma fração equivalente a outra de denominador igual a uma potencia de 10), é necessário e suficiente que o denominador **q seja divisível, apenas, por 2 ou por 5** (ou seja, os fatores primos de 10 – a base de numeração utilizada). Com efeito, qualquer fração equivalente a $\frac{p}{q}$ assume a forma $\frac{pk}{qk}$, com k inteiro não nulo. Para que qk seja uma potência de 10, não pode haver fatores primos em q distintos de 2 e de 5, e reciprocamente, aparecendo apenas os fatores primos 2 ou 5 em q, qk pode tornar-se uma potência de 10 para algum inteiro k conveniente, desde que p e q sejam primos entre si. Assim, as seguintes frações ordinárias irredutíveis $\frac{127}{50}\left(=\frac{127.2}{50.2}=\frac{254}{100}\right)$, $\frac{1}{2}=\frac{1.5}{2.5}=\frac{5}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{69}{10}$ podem ser todas escritas sob a forma de um número decimal exato. A fração $\frac{15}{300}$ também pode ser escrita como um decimal exato, embora haja o fator 3 no denominador. Algum erro? Não, basta perceber que a fração dada é equivalente à fração $\frac{1}{20}$. Perceba-se também que o "fim" da divisão do exemplo acima é meramente convencional. Quando se obtém resto nulo, a divisão é interrompida apenas por conveniência. Teoricamente, lembrando que *zero dividido por qualquer número não nulo produz quociente e resto ainda iguais a zero*, a divisão poderia progredir "para sempre". Caso se quisesse continuar a divisão, concluir-se-ia que: 2,54 = 2,540 = 2,5400 = 2,540000000 = 2,54000..., sendo que este último símbolo significa que a divisão de 0 por 5 continuaria indefinidamente.

a) jamais se obtém resto nulo. Quando se divide qualquer inteiro p pelo inteiro não nulo **q**, há exatamente **q restos possíveis**, a saber: 0, 1, 2, ..., q – 1, uma vez que o resto deve ser um natural inferior ao divisor. Por exemplo, a divisão abaixo não corresponde à definição usual.

$$\begin{array}{r|l} 127 & 50 \\ \hline 77 & 1 \end{array}$$

pois, embora $127 = 50.1 + 77$, o resto é maior que o divisor.

Assim, excluindo-se o resto nulo, ao dividir p por q, é possível obter apenas um número *finito* de restos distintos (no máximo, $q - 1$). Quando algum resto que aparecer for repetido, a sequência de resto vai repetir-se "para sempre", produzindo-se então uma **dízima periódica.** Ex.:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 21 \\ \cline{2-2} 100 & 1,4761904... \\ 160 & \\ 130 & \\ 40 & \\ 190 & \\ 10 & \\ 100 & \end{array}$$

A partir da primeira repetição nos restos (no caso, a partir do resto 10), é óbvio que haverá também repetições nos quocientes (no exemplo, de 4 a 0), de modo que a sequência de números **476190** será repetida num processo sem fim. Tal sequência é exatamente o período do número decimal que "tenta representar exatamente" a fração ordinária $\frac{31}{21}$. As aspas são justificadas observando a impossibilidade real de fazer tal representação, já que o denominador 21 contém fatores primos distintos de 2 ou de 5 e, portanto, *nunca* possuirá um múltiplo igual a uma potência de 10.

Todos os raciocínios empregados são generalizáveis, o que demonstra o seguinte teorema: **Dividindo-se dois inteiros quaisquer, a representação decimal obtida é sempre finita ou infinita, mas periódica.**

Cabe também lembrar as regras práticas que permitem visualizar os números decimais racionais na forma de um quociente entre dois inteiros (**fração geratriz**).

## 7.6. DECIMAIS EXATOS:

De modo a obter a fração geradora de um número decimal exato, exclui-se a vírgula, obtendo-se o numerador. O denominador consistirá de uma potência de base 10 e expoente igual ao número de casas decimais consideradas, simplificando, se possível, o quociente A demonstração deste resultado é simples e segue o raciocínio do exemplo seguinte. Ex.: $13,693 = \frac{13693}{1000}$.

De fato:

$$13,693 = 10 + 3 + \frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{1000 + 3000 + 600 + 90 + 3}{1000} = \frac{13693}{1000}.$$

Inversamente, já foi provado que quando o denominador de uma fração racional reduzida (simplificada) apresenta, apenas, os fatores primos **2 ou 5** em sua decomposição, então o decimal equivalente é exato, possuindo um número de casas decimais igual ao maior expoente que aparece nos fatores 2 ou 5, como é fácil demonstrar. Ex.:

$$\frac{13461}{5600} = \frac{13461:7}{5600:7} = \frac{1923}{800} = \frac{1923}{2^5.5^2} = \frac{1923x5^3}{2^5.5^2x5^3} = \frac{240375}{2^5.5^5} = \frac{240375}{10^5} = \frac{240375}{100000} = 2,40375$$

Obs.: Note-se que, se uma fração ordinária irredutível possuir no denominador fatores primos diferentes de 2 e de 5, ela nunca pode ser um decimal exato, conforme discutido anteriormente, devendo tratar-se então de uma dízima periódica (simples ou composta).

## 7.7. DÍZIMAS PERIÓDICAS SIMPLES:

Inicialmente, separam-se partes inteira e decimal. A fração geratriz (da parte decimal) terá numerador igual ao número obtido pela justaposição dos algarismos do período. O denominador será constituído por uma quantidade de algarismos iguais a 9 correspondente ao número de algarismos do período. Ex.:

$$7,454545... = 7 + 0,454545... = 7 + \frac{45}{99} = 7 + \frac{5}{11} = 7\frac{5}{11} = \frac{82}{11}.$$

Um raciocínio interessante para obter a geratriz e explicar a regra precedente é o seguinte:

$x = 0,454545... \Rightarrow 100x = 45,454545...$ (multiplicando ambos os membros por 100). Subtraindo a primeira equação da segunda, conclui-se que:

$$100x - x = 45,454545... - 0,454545...$$

$$\text{Logo, } 99x = 45 \Leftrightarrow x = \frac{45}{99} = 0,454545...$$

Naturalmente estas ideias podem ser facilmente generalizadas, justificando a regra de obtenção da geratriz de uma dízima periódica.

Reciprocamente, demonstra-se que, quando o denominador de uma razão racional já simplificada apresenta como fatores números primos diferentes de 2 e de 5, a representação decimal da fração será uma *dízima periódica simples*. De fato,

neste caso, nunca poderá ser obtida uma fração decimal equivalente, conforme já explanado. Assim, na divisão continuada, o processo de divisão prossegue ininterruptamente, gerando uma dízima periódica. Em seguida, será visto quando tal dizima é composta. Ex.:

$\frac{625}{273} = \frac{625}{3.7.13} = 2,289377289377289377... = 2,\overline{289377}$ (a barra explicita o período)

Obs.: Agora deve-se perceber, sob um novo ponto de vista, que todo decimal exato pode ser visto como uma dízima de período igual a 9 (além do 0, como dito antes). Por exemplo:

5 = 4,999... Com efeito, fazendo x = 4,999..., deve-se impor que 10x = 49,999... Logo: 10x – x = 49,999... – 4,999... $\Leftrightarrow$ 9x = 45 $\Leftrightarrow$ x = 5.

Analogamente, tem-se 11,169 = 11,168999...

De um modo geral, há uma certa *ambiguidade* quando se fala na representação decimal de um decimal exato: sempre existem **duas**. Uma com período 0, outra com período **9**. Dessa forma:

**5 = 5,00... = 4,999..., assim como 11, 169 = 11,169000... = 11,168999...**

Apesar de poder parecer estranho, a aceitação de tais propriedades tem como principal conquista a *generalização*: **qualquer número real pode ser escrito na representação decimal**, embora, em certos casos, tal escrita possa parecer "forçada" (o que ocorre devido ao sistema de numeração escolhido). É crucial entender que quando se escreve 4,9 ou 4,99 ou 4,999999999 **não se tem o número 5**, mas sim **aproximações por falta** de (ou seja, por valores *menores que*) 5. Não existe a "melhor" aproximação por falta de 5, de modo que a notação 4,999... significa apenas que a sequência de aproximações menores que 5 não tem fim, sendo dependente apenas da precisão desejada (isto é, de quantos dígitos se quer na aproximação).

Similarmente, é óbvio (inclusive mais "natural", num certo sentido) que 5,1 ou 5,01 ou 5,0000000001 **não são iguais a 5**, mas sim **aproximações por excesso** de (bem entendido: por valores *maiores que*) 5. Quando se usa a símbolo 5,000..., simplesmente está sendo afirmado que a sequência de aproximações é ilimitada: sempre existe uma aproximação por excesso de 5 "melhor" ("mais próxima") que as já utilizadas. Dessa maneira:

a) **4 < 5 < 6**. Em negrito, as "melhores" aproximações de 5 por falta e por excesso, utilizando exatamente um algarismo.

b) **4,9 < 5 < 5,1**. Em negrito, as "melhores" aproximações de 5 por falta e por excesso, utilizando exatamente dois algarismos.

c) **4,99 < 5 < 5,01**. Em negrito, as "melhores" aproximações de 5 por falta e por excesso, utilizando três algarismos.

d) **4,99999 < 5 < 5,00001**. Em negrito, as "melhores" aproximações de 5 por falta e por excesso, utilizando cinco algarismos.

Portanto, quando se escreve, como mais um exemplo (a ser compreendido de uma vez por todas) que $\frac{1}{9} = 0,111...$, o que se está representando são os seguintes fatos principais:

1. É **impossível** (consoante o exposto precedentemente) obter uma representação decimal finita para a fração ordinária $\frac{1}{9}$.

2. Os números **0,1, 0,11, 0,111, 0,1111, 0,111111111111** são aproximações (por falta) cada vez "melhores" (na ordem dada) para a fração ordinária $\frac{1}{9}$.

3. Não existe a "melhor" aproximação por falta de $\frac{1}{9}$, e a sequência acima não termina nunca.

4. É conveniente que *todos* os números reais admitam uma representação decimal, ainda que *infinita* ou *dupla*, visto ser bastante fáceis as regras operatórias com esses números (principalmente, a adição e a subtração).

## 7.8. DÍZIMAS PERIÓDICAS COMPOSTAS:

Separa-se a parte decimal da inteira. A fração geratriz da primeira terá como numerador a diferença entre um número formado pela justaposição dos algarismos do anteperíodo e do período e outro número formado apenas pelos algarismos do anteperíodo. O denominador da geratriz será composto por uma sequência de algarismos 9 em igual quantidade à dos algarismos do período, seguidos por tantos dígitos 0 quanto forem os algarismos do anteperíodo. Ex.:

$$2,43555... = 2 + 0,43555... = 2 + \frac{435-43}{900} = 2 + \frac{392}{900} = 2 + \frac{98}{225} = \frac{548}{225}.$$

Uma maneira de justificar tal regra é proceder de modo análogo ao das dízimas simples. No exemplo dado, seja x = 0,43555... Multiplicando ambos os membros por 100 e por 1000, tem-se 100x = 43,555... e 1000x = 435,555.... Subtraindo:

$$1000x - 100x = 435,555... - 43,555... \Leftrightarrow 900x = 435 - 43 \Leftrightarrow x = \frac{435-43}{900}.$$

De modo inverso, se numa fração racional reduzida o denominador possuir, além dos fatores **2 ou 5**, outros primos, demonstra-se, então, que sua representação decimal será feita por meio de uma *dízima periódica composta*. Adicionalmente, a quantidade de algarismos da parte aperiódica é exatamente igual ao maior expoente que aparece em 2 ou em 5.

## Exercícios Resolvidos

1) $\frac{7}{24} = \frac{7}{2^3.3} = \frac{1}{2^3}.\frac{7}{3} = \left(\frac{1}{2^3}.\frac{5^3}{5^3}\right).\frac{7}{3} = \left(\frac{125}{1000}\right).\frac{7}{3} = \frac{1}{1000}.\left(\frac{875}{3}\right) =$

$= \frac{1}{1000}.291,666... = 0,291666...$

2) $\frac{1234567}{4840} = \frac{1234567}{2^3.5.11^2} = \frac{1234567x5^2}{2^3.5.11^2x5^2} = \frac{30864175}{2^3.5^3.11^2} = \frac{1}{10^3}.\frac{30864175}{11^2} =$

$= \frac{1}{10^3}.255075,826446280991735537190082644628099173553719 00... =$

$= 255,075826446280991735537190082644628099173553719 00... =$

$=255,075\overline{826446280991735537190}$

Tudo o que foi estudado sobre decimais e dízimas pode ser resumido no teorema abaixo:

**7.8.1 Teorema:** Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional, escrito na forma irredutível, ou seja, valendo que mdc (p,q) = 1.

a) r é um decimal exato se, e somente se, q contém exclusivamente os fatores primos 2 ou 5. Neste caso, o número de casas decimais é igual ao maior dos expoentes que aparecem num desses primos.

b) r é uma dízima periódica simples (*não exata*) se, e somente se, q contém exclusivamente fatores primos distintos de 2 e de 5. Aqui, o número de algarismos do período é, no máximo, q – 1.

c) r é uma dízima periódica composta (*não exata*) se, e somente se, q contém, além dos fatores primos 2 ou 5, algum outro fator primo distinto desses. Nesta situação, o número de algarismos do anteperíodo é igual ao maior dos expoentes que aparecem em 2 ou em 5, após a decomposição.

**Demonstração:**

a) Se $q = 2^a.5^b$ então $r = \frac{p}{2^a.5^b}$.

Se $a \geq b$ então basta fazer $r = \frac{p.5^{a-b}}{2^a.5^b.5^{a-b}} = \frac{p.5^{a-b}}{2^a.5^a} = \frac{p.5^{a-b}}{(10)^a}$.

Desta forma, o número r é um decimal exato, obtido a partir do número $p.5^{a-b}$, bastando escrever a vírgula após o a-ésimo algarismo (da esquerda para a direita) de $p.5^{a-b}$.

Se $a < b$ então $r = \frac{p.2^{b-a}}{2^a.5^b.2^{b-a}} = \frac{p.2^{b-a}}{2^b.5^b} = \frac{p.2^{b-a}}{(10)^b}$

Portanto, o número r é um decimal exato, obtido a partir do número $p.2^{b-a}$, bastando escrever a vírgula após o b-ésimo algarismo (da esquerda para a direita) de $p.2^{b-a}$.

b) Seja $p = (p_n p_{n-1}...p_1 p_0)_{10}$ o numerador e p o denominador da fração p/q, sendo mdc (p, q) = 1. Pode-se organizar a divisão de p por q da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r|l} p_n\ p_{n-1}\ \ldots\ p_1\ p_0 & q \\ \hline -qq_1 & q_1q_2\ldots \\ r_1p_{n-1} & \\ -qq_2 & \\ \hline r_2\ldots & \end{array}$$

Como mdc(p, q) = 1 então nenhum dos restos obtidos em cada divisão vai ser igual a zero, fazendo com que a conta para a determinação do quociente $q_1q_2...$ da divisão siga infinitamente. Como no algoritmo acima cada um dos restos $r_1$, $r_2$, ... obtidos é igual a um dos possíveis restos não nulos da divisão de um número inteiro por q, então os valores de $r_i$ podem ser 1, 2, 3, ..., q – 1. Note também que a partir do momento em que dois destes restos coincidam (isto é obrigatório que ocorra, pois, sua quantidade é finita), por exemplo $r_i = r_k$ $(i < j)$, o respectivo dígito do quociente também vai repetir: $q_i = q_k$. Assim, o bloco de dígitos do quociente compreendido desde $q_i$ até $q_{k-1}$ vai ser igual ao bloco de dígitos que vai desde $q_k$ até $q_{2k-j-1}$, caracterizando a dízima periódica. Como há possíveis q – 1 valores para os restos, consequentemente há no máximo q – 1 dígitos na parte periódica do quociente.

A análise quanto a existência ou não dos primos 2 e 5 na fatoração de q será feita na demonstração do item seguinte.

c) Se $q = 2^A.5^{A-B}.C$, com C não divisível por 2 nem por 5 então $\frac{p}{q} = \frac{p.10^{-A}}{C.2^B}$

Se $q = 2^{A+B}.5^A.C$, com C não divisível por 2 nem por 5 então $\frac{p}{q} = \frac{p.10^{-A}}{C.5^B}$

Como o primeiro dígito não nulo depois da vírgula no número $p.10^{-A}$ está A casas depois da vírgula, para demonstrar que o anteperíodo possui A + B dígitos, basta mostrar que $\frac{1}{C.2^B}$ e $\frac{1}{C.5^B}$ tem suas dízimas começadas a partir da casa B depois da vírgula.

Uma vez que $\frac{1}{C.2^B} = \frac{10^{-B}.5^B}{C}$ e $\frac{1}{C.5^B} = \frac{10^{-B}.2^B}{C}$ então agora basta mostrar que $\frac{5^B}{C}$ e $\frac{2^B}{C}$ têm suas dízimas começadas logo depois da virgula.

Seja $D = \frac{10^{\phi(C)} - 1}{C}$ (onde $\phi(C)$ é a função de Euler, que diz o número de naturais menores ou iguais a N, primos a N). Pelo Teorema de Euler: "Se A e N são primos entre se, $A^{\phi(N)} - 1$ é divisível por N"

Desta forma, pode-se reescrever as frações da seguinte forma:

$\frac{5^B}{C} = \frac{5^B.D}{10^{\phi(C)} - 1}$ e $\frac{2^B}{C} = \frac{2^B.D}{10^{\phi(C)} - 1}$

Se $Q_1$ é o resto da divisão de $5^B.D$ por $10^{\phi(C)} - 1$ e $Q_2$ o resto de $2^B.D$ por $10^{\phi(C)} - 1$, reescrevendo as frações tem-se: $\frac{5^B}{C} = I_1 + \frac{Q_1}{10^{\phi(C)} - 1}$ e $\frac{2^B}{C} = I_2 + \frac{Q_2}{10^{\phi(C)} - 1}$, onde $I_1$ e $I_2$ são dois números inteiros. Devido à soma da progressão geométrica:

$$\frac{Q_1}{10^{\phi(C)} - 1} = \frac{Q_1}{10^{\phi(C)}} + \frac{Q_1}{100^{\phi(C)}} + \frac{Q_1}{1000^{\phi(C)}} + \ldots \text{ e}$$

$$\frac{Q_2}{10^{\phi(C)} - 1} = \frac{Q_2}{10^{\phi(C)}} + \frac{Q_2}{100^{\phi(C)}} + \frac{Q_2}{1000^{\phi(C)}} + \ldots$$

Portanto, para finalizar a demonstração, basta mostrar que o algarismo das unidades de $I_1$ é diferente do algarismo das unidades de $Q_1$ e que o algarismo das unidades de $I_2$ é diferente do de $Q_2$.

Pelo algoritmo da divisão, pode-se afirmar que $Q_1 - I_1 = 5^B.C - I_1.10^{\phi(C)}$ e ainda $Q_2 - I_2 = 2^B.C - I_2.10^{\phi(C)}$. Como C é ímpar, tem-se que $Q_1 - I_1$ e $Q_2 - I_2$ não são múltiplos de 10 e segue o que foi dito acima.

Isso mostra nos dois casos que a parte não periódica tem A ÷ B números, que é o maior dos expoentes dentre 2 e 5.

## Exercícios Resolvidos

1) (OBM-98) $\sqrt{0,4444...} =$

A) 0,2222... B) 0,3333... C) 0,4444... D) 0,5555... E) 0,6666...

**1ª Solução:**

Pela regra da dízima simples, o numerador é formado pelo período e o denominador é formado por tantos noves quantos dígitos tem o período. Assim:

$$\sqrt{0,444...} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0,666...$$

**2ª Solução:**

Se $x = 0,444... \Rightarrow 10x = 4,444... \Rightarrow 10x - x = 4,444... - 0,444... \Rightarrow$

$9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

Portanto: $\sqrt{0,444...} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0,666...$

**2)** (Colégio Naval-53) Efetuar: $\frac{0,1333... \div 0,2}{\frac{1}{1,2}}$.

**Solução:**

$$\frac{0,1333... \div 0,2}{\frac{1}{1,2}} = \frac{\frac{13-1}{90} \div \frac{2}{10}}{\frac{10}{12}} = \frac{\frac{12}{90} \div \frac{1}{5}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{2}{15}.5}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{3}.\frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

**3)** (Olimpíada do Ceará-03) Escreva a dízima 0,23200320032003... como fração $\frac{p}{q}$, em que p e q são primos entre si.

**1ª Solução:**

Pela regra da dízima composta p é formado pela a diferença entre um número formado pela justaposição dos algarismos do anteperíodo e do período e outro número formado apenas pelos algarismos do anteperíodo, enquanto que q é formado por uma sequência de algarismos 9 em igual quantidade à dos algarismos do período, seguidos por tantos dígitos 0 quanto forem os algarismos do anteperíodo.

$\frac{p}{q} = \frac{23200-2}{99990} = \frac{23198}{99990}$

Desde que $23198 = 2.7.1657$ e $99990 = 2.3^2.5.11.101$ então mdc (23198, 99990) = 2.

Portanto, a fração irredutível é $\frac{p}{q} = \frac{11599}{49995}$.

**2ª Solução:**

Se $x = 0,23200320032003... \Rightarrow 10x = 2,3200320032003... \Rightarrow 10^5x =$ $23200,320032003... \Rightarrow 10^5x - 10x = 23200 - 2 \Rightarrow 99990x = 23198 \Rightarrow$ $x = \frac{11599}{49995}$

4) (ENEM-14) Um estudante se cadastrou numa rede social na internet que exibe o índice de popularidade do usuário. Esse índice é a razão entre o número de admiradores do usuário e o número de pessoas que visitam seu perfil na rede.
Ao acessar seu perfil hoje, o estudante descobriu que seu índice de popularidade é 0,312121212....
O índice revela que as quantidades relativas de admiradores do estudante e pessoas que visitam seu perfil são
a) 103 em cada 330.
b) 104 em cada 333.
c) 104 em cada 3 333.
d) 139 em cada 330.
e) 1 039 em cada 3 330.

**Solução: Alternativa A**

Deve-se determinar a fração equivalente à dízima periódica 0,312121212...
$x = 0{,}312121212... \Rightarrow 10x = 3{,}12121212... \Rightarrow 1000x = 312{,}12121212... \Rightarrow$
$1000x - 10x = 312{,}12121212... - 3{,}12121212... \Rightarrow 990x = 309 \Rightarrow$
$$x = \frac{309}{990} = \frac{3 \times 103}{3 \times 330} = \frac{103}{330}$$
Logo, a proporção é de 103 em cada 330.

5) (Colégio Naval-92) Seja M um conjunto cujos elementos são números naturais compostos por três algarismos distintos e primos absolutos. Sabe-se que o inverso de cada um deles é uma dizima periódica simples e que, invertendo-se a posição dos algarismos das centenas com os das unidades, em todos eles, os respectivos inversos são dízimas periódicas compostas. O número de subconjuntos de M é:
a) 16 b) 256 c) 1024 d) 2048 e) maior que 3000
**Solução:**
Os algarismos que são primos absolutos são 2, 3, 5 e 7. Desde que o conjunto M é formado por elementos cujos inversos são dízimas periódicas simples então estes elementos não são múltiplos nem de 2 e nem de 5. Assim, o algarismo das unidades de cada elemento não pode ser 2 ou 5, sobrando apenas as possibilidades 3 ou 7. Quando são invertidos os algarismos das centenas e unidades as dízimas passam a ser compostas, indicando que os possíveis algarismo das centenas vale 2 ou 5. Lembrando que os algarismos devem distintos, tem-se as seguintes possibilidades:

253, 523, 237, 273, 257, 527, 537 e 573.

Como tem-se um total de 8 elementos em M, a quantidade de subconjuntos de M vale $2^8 = 256$.

# Exercícios propostos

## Frações Algébricas

1) (ESSA-90) Simplificando $\frac{(x^2+4x+4)(x^2-x-6)}{(x+2)(x-3)(x+2)^2}$, encontraremos:

(A) 0 (B) $x-3$ (C) $x+2$ (D) $(x+2)^2$ (E) 1

2) (ESSA-90) Simplificando a fração $\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+9}$, encontramos:

(A) $\frac{a+4}{a+3}$ (B) $\frac{12}{9}$ (C) $\frac{19}{15}$ (D) $\frac{a+7}{a+6}$ (E) $\frac{4}{3}$

3) (ESSA-91) Simplificando a fração algébrica $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-x}$, para $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$, obtemos:

(A) $\frac{x}{x+1}$ (B) $\frac{1}{x-1}$ (C) $\frac{x-1}{x}$ (D) $\frac{x-1}{x+1}$ (E) $\frac{1}{x+1}$

4) (CM Brasília-07) Quando simplificada a expressão $(x^{-1}+y^{-1})^{-1}$, é igual a

a) $x+y$ b) $\frac{x+y}{xy}$ c) $xy$ d) $\frac{1}{xy}$ e) $\frac{xy}{x+y}$

5) (CM Brasília-07) Quando colocada na sua forma irredutível, a fração

$$F=\frac{x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$$

apresenta um denominador Q(x), tal que Q(2) é igual a

A ( ) 2. B ( ) 3. C ( ) 4. D ( ) 5. E ( ) 6.

6) (CM Brasília-08) Sabendo-se que x e y são reais positivos, a expressão

$$\frac{\left(x+2x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{1}{2}}+y\right).\left(x-2x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{1}{2}}+y\right)}{x^2-y^2}$$

é equivalente a:

a) $\frac{x}{y}$ b) $\frac{x+y}{x-y}$ c) $\frac{x-y}{x+y}$ d) $\frac{y-x}{x+y}$ e) 1

7) (CM Brasília-09) Simplifique a expressão $\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}} : \dfrac{1+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

a) a/b b) $a^2/b$ c) $a/b^2$ d) b/a e) $a^2/b^2$

8) (CM Fortaleza-07) Simplificando a expressão $\dfrac{\left[1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2}\right].x^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{xy}}$, com $x > y > 0$, obtemos

a) $x + y$ b) $x - y$ c) $y - x$ d) $-1$ e) 0

9) (CM Fortaleza-07) Se $\dfrac{a}{b} = 5$ e $\dfrac{c}{d} = \dfrac{1}{2}$, então o valor de $\dfrac{20ac - 9bd}{7ac + 3bd}$ é

a) $-2$ b) $-1$ c) 0 d) 1 e) 2

10) (CM Manaus-09) A simplificação da expressão $\dfrac{a^{-4} - b^{-4}}{a^{-2} - b^{-2}}$ com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq \pm b$ é:

a) $a^2 - b^2$ b) $a^2 + b^2$ c) $a^{-6} + b^{-6}$ d) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2}$ e) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

11) (CM Manaus-10) Determine o valor da expressão $\dfrac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{(zx^2 + y^2z + 2xyz)(x^2 - y^2)}$ para $x = 2009$, $y = 2010$ e $z = 2011$.

a) 2010 b) $-2011$ c) 1/2011 d) 2009 e) $-1/2011$

12) (CM RJ-06) Sabendo-se que $\dfrac{x^2 + y^2 + 2x + 2xy + 2y - 15}{x + y - 3} = 13$, determine o valor de $x + y$.

A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 11

13) (CM RJ-07) A forma simplificada da expressão

$$\frac{a^2c - (b^2c + b^2d) + a^2d}{c(a^2 + b^2) + 2(abc + abd) + d(a^2 + b^2)}$$ é:

a) $\dfrac{a+b}{ab}$ b) $\dfrac{c-d}{c+d}$ c) $\dfrac{a-b}{ab}$ d) $\dfrac{a-b}{a+b}$ e) $\dfrac{d+c}{dc}$

**14)** (CM RJ-08) A fração $\frac{37}{13}$ pode ser escrita sob a forma $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}$, onde (x, y, z) é igual a:

A) (11, 2, 5) B) (1, 2, 5) C) (1, 5, 2)
D) (13, 11, 2) E) (5, 2, 11)

**15)** (CM Salvador-06) Simplificando a expressão $\frac{a^6+2a^3+1}{a^2+2a+1}$, para todo $a \in R-\{-1\}$, obtemos:

(A) $a^4+a^2+1$ (B) $a^2+a+1$ (C) $a^3+a^2+1$
(D) $(a^2-a+1)^2$ (E) $(a+1).(a^2-a+1)$

**16)** (CM RJ-08) Se $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{x.z}+\frac{z}{x.y}=\frac{8}{6}$ e x + y + z = 16, o produto x.y.z é:

A) 192 B) 108 C) 48 D) 32 E) 10

**17)** (Epcar-20) Considere as expressões P e Q, com os números a, b e c reais positivos e distintos entre si.

$$P=\frac{(a^6+b^6+c^6)^2-(a^6-b^6-c^6)^2}{b^6+c^6} \qquad Q=\frac{(b^{-1}-a^{-1})^{-1}-(b^{-1}+a^{-1})^{-1}}{(a^{-1}+b^{-1})^{-1}-(a^{-1}-b^{-1})^{-1}}$$

A expressão $\sqrt{Q\sqrt{P}}$ é representada por

a) $b\sqrt{2a}$ b) $a\sqrt{2b}$ c) $a\sqrt{\frac{b}{2}}$ d) $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{2}}$

**18)** (CM Manaus-18) Para que se tenha a seguinte igualdade:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{x^2+5x-8}{x(x^2-4)}$$

Os valores numéricos reais de A, B e C devem ser iguais a:

a) A = – 2, B = 4, C = 1 b) A = 2, B = – 4, C = 1
c) A = 2, B = – 7/4, C = 3/4 d) A = 2, B = 3/4, C = – 7/4
e) A = – 2, B = – 3/4, C = 7/4

19) (UEPB-09) A expressão $E = \dfrac{x+2+\dfrac{4}{x}}{x^2-\dfrac{8}{x}}$, com $x \neq 0$ é equivalente a:

a) $x+2$ b) $(x+2)^{-1}$ c) $x-2$ d) $(x-2)^{-1}$ e) $(x-1)^{-1}$

20) (IBMEC-09) O valor de $\dfrac{2009^2-4}{2009^2+2009-2}$ é igual a

a) $\dfrac{2007}{2008}$ b) $\dfrac{2008}{2009}$ c) $\dfrac{2007}{2009}$ d) $\dfrac{2009}{2008}$ e) $\dfrac{2009}{2007}$

21) (Colégio Naval-18) Seja "x" real tal que $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{4}{1-x}=\dfrac{1}{x}$. Sendo assim, o valor de $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{7}{x}\right)$ é igual a

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) $-1$

22) (UECE-07) Para valores de a diferentes de $-1$, 0 e 1, a expressão:

$$\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\left(\frac{1-a}{a+1}-\frac{1+a}{1-a}\right)\left(1-\frac{a}{4}\right)$$

é igual a

a) $1-4a$ b) $1-4a^{-1}$ c) $a-1$ d) $a^{-1}-1$

23) (Unifesp-06) Se $\dfrac{1}{x^3+x+1}=\dfrac{27}{37}$, então $\dfrac{1}{x^3+x+2}$ é igual a

a) 27/84 b) 27/64 c) 27/38 d) 28/37 e) 64/27

24) (Unifor-98) A forma mais simples de se expressar o número real

$$y = \frac{\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{c}{ab}\right)\cdot(a-b+c)}{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{a^1b^1}+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{c^2}{a^2b^2}}$$ é

(A) $ab$ (B) $\dfrac{1}{ab}$ (C) $a-b+c$ (D) $a+b-c$ (E) $a-b-c$

**25)** (Epcar-17) Simplificando as expressões

$$A = \frac{\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right].x^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{xy}} \quad \text{e} \quad B = \frac{x^2-xy}{2x},$$

nas quais $y > x > 0$, é correto afirmar que

a) $\frac{A}{B} = 2^{-1}$ b) $\frac{B}{A} \in IN$ c) $A.B > 0$ d) $A + B > 0$

**26)** (IME-17) Sejam x, y e z números complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=25 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

O valor da soma $x^3 + y^3 + z^3$ é:

a) 210 b) 235 c) 250 d) 320 e) 325

**27)** (Epcar-19) Considere o conjunto de todos os valores de m e n para os quais a expressão algébrica A, abaixo, está definida.

$$A = \frac{\frac{m^2}{n^2}-\frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m^2}+\frac{2}{m.n}+\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{(m-n)^{-2}}{(m^2-n^2)^{-1}}$$

Nesse conjunto, uma expressão algébrica equivalente a A é

a) $m^2 + n^2$ b) $m^2 - n^2$ c) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ d) $\frac{m^2+n^2}{m-n}$

**28)** (Epcar-18) Ao fatorar e efetuar as simplificações na fração

$$\frac{-ab^2+b^2c+bc^2+ac^2-a^2c-a^2b}{a^2c+2abc+b^2c-a^3-2a^2b-ab^2}$$

considerando sua devida existência, obtém-se

a) $\frac{b+c}{c-a}$ b) $\frac{b+c}{a+b}$ c) $\frac{2a+c}{c-a}$ d) $\frac{b+c-a}{a+b}$

29) (Colégio Naval-11) Sejam a, b e c números reais são nulos tais que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=p$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=q$ e $ab+ac+bc=r$. O valor de $q^2+6q$ é sempre igual a

a) $\frac{p^2r^2+9}{4}$ b) $\frac{p^2r^2-9p}{12}$ c) $p^2r^2-9$

d) $\frac{p^2r^2-10}{4r}$ e) $p^2r^2-12p$

30) (Fuvest-16) As constantes A, B, C e D são tais que a igualdade

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Dx+C}{x^2+4}$$

é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Encontre os valores dessas constantes.

31) (Colégio Naval-81) Fatorando e simplificando a expressão

$$\frac{x\left(x^4-5x^2+4\right)-2\left(x^4-5x^2+4\right)}{\left(x^3-6x^2+12x-8\right).\left(x^2-1\right)}$$

obtemos:

(A) $\frac{x+2}{x-2}$ (B) $\frac{x-2}{x-1}$ (C) $\frac{x+1}{x-2}$ (D) $\frac{x-2}{x+2}$ (E) 1

32) (Colégio Naval-13) Dado que a e b são números reais não nulos, com $b \neq 4a$, e que $\begin{cases} 1+\frac{2}{ab}=5 \\ \frac{5-2b^2}{4a-b}=4a+b \end{cases}$, qual o valor de $16a^4b^2-8a^3b^3+a^2b^4$?

a) 4 b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{12}$ d) 18 e) $\frac{1}{4}$

33) (Colégio Naval-84) Se $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}=\frac{8}{3}$ e $x+y+z=16$, o produto x . y . z é:

(A) 192 (B) 48 (C) 32 (D) 108 (E) 96

34) (Colégio Naval-85) Sabendo que $3x-y-10z=0$ e que $x+2y-z=0$, o valor de $\frac{x^3+x^2y}{xy^2-z^3}$, sendo $z \neq 0$, é:

(A) 18 (B) 9 (C) 6 (D) 1 (E) 0

**35)** (Colégio Naval-88) Simplificando a expressão $\sqrt{1+\left(\frac{x^4-1}{2x^2}\right)}-\frac{x^2}{2}$, para $x \in$ IR*, obtêm-se:

(A) $\frac{1}{2x^2}$ (B) $\frac{x^4+x^2-1}{2x^2}$ (C) $\frac{x^4-x^2-1}{2x^2}$ (D) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$ (E) $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$

**36)** (Colégio Naval-78) Simplificando

$$\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

para $b \neq \pm a$ obtém-se :

(A) 1 (B) $\frac{a+b}{a-b}$ (C) $\frac{b}{a}$ (D) $\frac{a-b}{a+b}$ (E) $\frac{a}{b}$

**37)** (Colégio Naval-94) Efetuando-se $\frac{x}{2+y}+\frac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4}:\frac{2-x}{2+y}$, encontra-se:

a) $\frac{x}{y+2}$ c) $\frac{2}{y+2}$ c) $\frac{2-x}{y+2}$ b) $\frac{x+2}{y+2}$ d) $\frac{2x}{y+2}$

**38)** (Colégio Naval-98) A expressão $\frac{(x^3+y^3+z^3)^2-(x^3-y^3-z^3)^2}{y^3+z^3}$, é equivalente a:

(A) $4x^3$ (B) $4yx^3$ (C) $4zx^3$ (D) $4yzx^3$ (E) $4xyz$

**39)** (Colégio Naval-99) Se $m + n + p = 6$, $mnp = 2$ e $mn + mp + np = 11$, podemos dizer que o valor de $\frac{m}{np}+\frac{n}{mp}+\frac{p}{mn}$ é:

(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 18 (E) 22

**40)** (Colégio Naval-00) Se $2x - 3y - z = 0$ e $x + 3y - 14z = 0$, com $z \neq 0$, o valor da expressão $\frac{x^2+3xy}{y^2+z^2}$ é:

(A) 7 (B) 2 (C) 0 (D) $-\frac{20}{17}$ (E) - 2

**41)** (Colégio Naval-05) Se a, b, c e d são números reais não nulos tais que $ad^2 + bc^2 = 0$, pode-se afirmar que

a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d};b+d\neq 0$ b) $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d};c+d\neq 0$

c) $\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c+d};c+d\neq 0$ d) $\frac{c}{a}+\frac{b}{d}=\frac{b+c}{a+d};a+d\neq 0$

e) $\frac{c}{b}+\frac{d}{a}=\frac{c+d}{a+d};a+b\neq 0$

42) (Colégio Naval-07) Sendo $y=\frac{x+a}{x+b}$, qual é o valor numérico de y para $x=\sqrt{2}$, sabendo-se que, para todo número real $x\neq -b$, $y.(x^2-2)=x^2+\sqrt{2}x-4$?

a) 0 b) 0,5 c) 0,666... d) 1,5 e) 2

43) (EPCAr-00) Se a e b são reais positivos, a expressão

$$\frac{\left(a+2a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b\right)\cdot\left(a-2a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^2-b^2}$$

é equivalente a

a) $\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{a+b}$ c) $\frac{b-a}{a+b}$ d) 1

44) (EPCAr-00) Dadas as expressões $E=\frac{x^2-mx-nx+mn}{x^2-m^2}$ e $\frac{E}{n-x}=D^{-1}$, tem-se que D é igual a

a) $-x-m$ b) $x-m$ c) $x+m$ d) $-x+m$

45) (EPCAr-00) A expressão $\frac{1-x+\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x^2}}$ é equivalente a

a) $x^2-1$ b) $(x-1)^2$ c) $(x+1)^2$ d) $x^2+1$

46) (EPCAr-14) Considerando as expressões abaixo em que $a\neq B$

$$P=\frac{a^3-b^3}{a^2\sqrt{a}-\sqrt{b}a^2+ba\sqrt{a}-b\sqrt{b}a+b^2\sqrt{a}-b^2\sqrt{b}} \quad e \quad Q=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$$

Assim, tem-se $\frac{Q}{P}$ igual a

a) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

47) (EPCAr-08) Supondo x e y números reais tais que $x^2 \neq y^2$ e $y \neq 2x$, a expressão $\sqrt{\dfrac{\dfrac{2x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}+\dfrac{y^2}{y^2-x^2}}{(x+y)^{-1}+x(x^2-y^2)^{-1}}}$ sempre poderá ser calculada em IR se, e somente se,

a) $x \geq 0$ e $y \geq 0$
b) $x > 0$ e y é qualquer.
c) x é qualquer e $y \geq 0$
d) $x \geq 0$ e y é qualquer.

48) (IME-12) Seja a, b e c números reais e distintos. Ao simplificar a função real, de variável real,

$$f(x) = a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

obtém-se f(x) igual a:

a) $x^2 - (a+b+c)x + abc$
b) $x^2 + x - abc$
c) $x^2$
d) $-x^2$
e) $x^2 - x + abc$

49) Prove que, se x, y e z, são números reais distintos e $\dfrac{x}{y-z}+\dfrac{y}{z-x}+\dfrac{z}{x-y}=0$ então $\dfrac{x}{(y-z)^2}+\dfrac{y}{(z-x)^2}+\dfrac{z}{(x-y)^2}=0$.

50) Mostre que se $a+b+c=0$ então

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

51) Prove que:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

52) Mostre que se $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ então $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{a^n+b^n+c^n}$.

53) (OBM-12) Sejam a, b reais positivos tais que $\dfrac{a+2b}{b}=\dfrac{a+b}{a}$. O valor de $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ é:

A) 4
B) $3+\sqrt{3}$
C) $2+2\sqrt{2}$
D) $2+\sqrt{5}$
E) 5

**54)** Sejam x, y, e z números tais que $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $xyz = 4$. Calcule o valor de

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $-\frac{2}{9}$

**55)** (Olimpíada da Holanda-83) Sejam a, b, c e p números reais, com a, b e c não todos iguais, tais que $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=p$. Determine todos os valores possíveis de p e prove que $abc + p = 0$.

**56)** (OBM-05) Dado que $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{1}{11}$, qual é o valor de

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}?$$

**57)** (OBM-01) Sejam *a*, *b* e *c* números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$.
Calcule os possíveis valores de $\frac{(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}$.

**58)** (Olimpíada do Pará-03) Prove que:

$$\frac{2001}{2}-\frac{2000}{3}+\frac{1999}{4}-\frac{1998}{5}+\ldots-\frac{2}{2001}+\frac{1}{2002}=\frac{1}{1002}+\frac{3}{1003}+\frac{5}{1004}+\ldots+\frac{2001}{2002}.$$

**59)** (Olimpíada do Pará-13) Sejam x, y, z números reais positivos mais que $xyz(x + y + z) = 1$. Mostre que a seguinte igualdade é válida:

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$

**60)** (Olimpíada do Pará-08) Suponha que x, y e z são números tais que $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Mostre que $\frac{x^6+y^6+z^6}{x^3+y^3+z^3}=x.y.z.$

**61)** (OBM-10) Os números *x* e *y* são distintos e satisfazem $x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y}$. Então xy é igual a

A) 4 B) 1 C) −1 D) −4 E) é preciso de mais dados

62) (OBM-06) Os dois números reais $a$ e $b$ são não nulos e satisfazem $ab = a - b$. Assinale a alternativa que exibe um dos possíveis valores de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

A) $-2$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

63) (Olimpíada Balkan Jr.-97) Sejam a e b números reais tais que $|a| \neq |b|$ e $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 6$. Calcule o valor de:

$$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} + \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}.$$

a) 216 b) $\frac{18}{7}$ c) $\frac{25}{6}$ d) $\frac{17}{9}$ e) 24

64) (Olimpíada de Campina Grande-02) Se a, b, c são números reais não nulos tais que $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$, e $x = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ e $x < 0$. Então, x é igual a:

A) $-2$ B) $-4$ C) $-6$ D) $-8$ E) $-1$

65) (Olimpíada do Canadá-69) Mostre que se $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ e $p_1, p_2, p_3$ não são todos nulos, então

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$$

para todo inteiro positivo n.

66) (OBM-02) Se $xy = 2$ e $x^2 + y^2 = 5$, então $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$ vale:

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{25}{4}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

67) (Online Math Open-14) Sejam a, b e c números reais para os quais

$$\frac{5}{a} = b + c, \quad \frac{10}{b} = c + a \quad \text{e} \quad \frac{13}{c} = a + b.$$

Calcule o valor de $a + b + c$.

68) (Olimpíada da Estônia-17) Os números reais x, y e z satisfazem $x + y + z = 4$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$. Determine o valor de $x^3 + y^3 + z^3 + xyz$.

## Frações Decimais e Periódicas

1) (Colégio Naval-13) Analise as afirmativas a seguir.

I) $9,\overline{1234} > 9,1\overline{234}$

II) $\frac{222221}{222223} > \frac{555550}{555555}$

III) $\sqrt{0,444\ldots} = 0,222\ldots$

IV) $2^{\sqrt{27}} = 64^{0,5}$

Analise a opção correta.

a) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
c) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
d) Apenas a alternativa III é verdadeira.
e) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

2) (ESSA-78) Na proporção $\frac{x}{0,5} = \frac{\frac{1}{3}}{1,8333\ldots}$, o valor de $\underline{x}$ é:

(A) $\frac{3}{35}$ (B) $\frac{11}{36}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{11}$

3) (UPE-11) A expressão $\frac{1,101010\ldots + 0,111\ldots}{0,09696\ldots}$ é igual a

a) 12,5 b) 10 c) 8,75 d) 5 e) 2,5

4) (Colégio Naval-14) Sabe-se que a média aritmética da soma dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive é k. Sendo assim, pode-se afirmar que o número $\frac{1}{k}$ é.

a) natural.
b) decimal exato.
c) dízima periódica simples.
d) dízima periódica composta.
e) decimal infinito sem período.

5) (Colégio Naval-15) Se a fração irredutível $\frac{p}{q}$ é equivalente ao inverso do número $\frac{525}{900}$, então o resto da divisão do período da dízima $\frac{q}{p+1}$ por 5 é:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

6) (ESSA-93) O valor de $\sqrt{0,111...}$ é:
(A) racional inteiro (B) 0,333... (C) 0,222... (D) 0,1 (E) 0,111...

7) (CM Brasília-04) O resultado da simplificação de $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{0,04}}}$ é

a) $\frac{\sqrt[4]{2}}{0,004}$ b) $\frac{\sqrt[4]{2}}{0,002}$ c) $\sqrt{\frac{2}{0,04}}$ d) $\sqrt[4]{10}$ e) $\sqrt{10}$

8) (CM Brasília-08) Calcule a soma dos termos da maior fração irredutível, para que o produto de seus termos seja 54.
A ( ) 15 B ( ) 55 C ( ) 21 D ( ) 29 E ( ) 36

9) (CM RJ-07) Na expansão decimal de 5/39 o 2007º algarismo depois da vírgula é:
A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 8

10) (CM RJ-09) Calcule o valor da expressão

$$\frac{\frac{4}{33} \div 2,727272... + \frac{1}{3} \times \left(0,2 \div \left(\frac{9}{32} \times 5,333...\right)\right) + 1}{\left(\frac{7}{5}\right)^2}$$

O resultado, em sua forma decimal, é:
(A) 0,5 (B) 0,55555... (C) 0,595959... (D) 1,0 (E) 1,5555...

11) (Unicentro-07) Considere m = 2,222... e n = 1,111... É correto afirmar que a expressão $\sqrt{m-n^2}$ é igual a

a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ b) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{11}$

12) (UESPI-03) Sendo a = 1,666..., b = 1,333... e c = 3, então o valor da expressão (a – b)c é:
a) 1/9 b) 1/3 c) 4/9 d) 8/9 e) 1

13) (ESPM-04) O valor da expressão numérica:

$$(-3)^4 : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-2/3} . (0,444...)^{-1}$$

é um número:
a) Par; b) Primo; c) Múltiplo de 7;
d) Múltiplo de 9; e) Maior que 50.

14) (UEMS-05) Sejam x = 0,414141... e y = 0,595959.... então x + y é:
a) 0,999999... b) 1 c) 1,001001001...
d) 1,010101... e) 1,111111...

15) (UESPI-09) O valor de $\sqrt{1,777...}$?
a) 1,222... b) 1,333... c) 1,555... d) 1,666... e) 1,777...

16) (UEPB-05) Quando multiplicamos um número inteiro n, estritamente positivo, por $(0,02)^2$ esse número n fica:
a) multiplicado por 4 milésimos. b) dividido por 2.500.
c) subtraído de 2.500. d) multiplicado por 2.500.
e) dividido por 4 centésimos.

17) (Uncisal-10) Conferindo o gabarito, Paulo constatou que não tinha respondido 1/8 do total de questões do teste, por falta de tempo, e que havia acertado 4/7 das questões restantes. Se ele respondeu erradamente 12 questões, o total de questões desse teste era
(A) 24. (B) 25. (C) 28. (D) 30. (E) 32.

18) (Colégio Naval-13) Somando todos os algarismos até a posição 2012 da representação decimal da fração irredutível $\frac{5}{7}$ e, em seguida, dividindo essa soma por 23, qual será o resto dessa divisão?
a) 11 b) 12 c) 14 d) 15 e) 17

19) (Unimontes-04) No primeiro dia de liquidação em uma sapataria, foi vendida a metade do seu estoque. No segundo dia, foi vendido um terço do que restou; no terceiro, foi vendido um quarto do que restou e, assim, sucessivamente. Após quantos dias ficou exatamente um décimo do estoque inicial?
A) 10 B) 9 C) 8 D) 7

20) (Colégio Naval-91) A representação decimal do número $(2^a.3^b.5^c)^{-1}$, sendo a, b e c números naturais, é uma dízima periódica composta. Sendo assim, pode-se afirmar que, necessariamente:
a) a = 0, b ≠ 0 e c ≠ 0 b) a ≠ 0, b ≠ 0 e c = 0
c) a ≠ 0, b = 0 e c ≠ 0 d) a ≠ 0, ou c = 0 e b ≠ 0
e) a ≠ 0, b ≠ e c ≠ 0

21) (Colégio Naval-95) Resolvendo-se a expressão:

$$x = \frac{80,666... + 4\frac{3}{2} - 2\sqrt{9} + 90,5}{\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$, encontra-se:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

22) (Colégio Naval-95) A fração $\frac{312}{455}$ é equivalente a fração irredutível $\frac{a}{b}$, logo a + b é igual a:

a) 53 b) 55 c) 57 d) 59 e) 61

23) (Colégio Naval-96) Sobre o número $\frac{1937}{8192}$ podemos afirmar que é:

(A) uma dízima periódica simples;
(B) uma dízima periódica composta;
(C) um decimal exato com 12 casas decimais;
(D) um decimal exato com 13 casas decimais;
(E) um decimal exato com 14 casas decimais.

24) (Colégio Naval-97) Dados os números:

$A = 0,27384\overline{951}$, $B = 0,\overline{27384951}$ $C = 0,17384\overline{951}$,

$D = 0,2\overline{7384951}$ $E = 0,27384\overline{951}$, $F = 0,27384951279897128888...$

Podemos afirmar que:

a) A > F > E > C > D > B b) B > C > A > F > E > D
c) A > F > B > D > C > E d) F > C > D > B > A > E
e) E > A > C > D > F > B

25) (Colégio Naval-00) Para dividir a fração 16/3 por 32, um aluno subtraiu 14 do numerador. Por qual número deverá dividir o denominador para acertar o resultado?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{6}{4}$ (E) 4

26) (IME-91) A coleção de selos de Roberto está dividida em três volumes. Dois décimos do total de selos estão no primeiro volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

**27)** (Colégio Naval-05) Um certo professor comentou com seus alunos que as dízimas periódicas podem ser representadas por frações em que o numerador e o denominador são números inteiros e, neste momento, o professor perguntou aos alunos o motivo pelo qual existe a parte periódica. Um dos alunos respondeu justificando corretamente, que em qualquer divisão de inteiros

a) o quociente é sempre um inteiro.
b) o resto é sempre um inteiro.
c) o dividendo é o quociente multiplicado pelo divisor, adicionado ao resto.
d) os possíveis valores para resto têm uma quantidade limitada de valores.
e) que dá origem a uma dízima, os restos são menores que a metade do divisor.

**28)** (EPCAr-00) Vendem-se $\frac{2}{5}$ de uma peça de tecido e depois $\frac{5}{12}$ do restante. O que sobra é vendido por R$ 1.400,00. Sabendo-se que o tecido custa R$ 5,00 o metro, o comprimento inicial da peça era

a) 400 m b) 800 m c) 1200 m d) 1600 m

**29)** (EsPCEx-04) Dados os números $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \sqrt{3} + 1$ e $c = 0,1333...$, pode-se afirmar que:

a) a.b é um número irracional
b) (a – b).c é um número irracional
c) (a + b).c é um número racional
d) b.c é um número racional
e) a.b.c é um número racional

**30)** (Colégio Naval-01) O valor da expressão

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot(0,333...+1)-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}\right)^{\sqrt{25}}$$ é:

A) $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ B) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ C) 0 D) 1 E) - 1

**31)** (Olimpíada do Ceará-83) Observe que: $\frac{1}{9} = 0,111111...$, um algarismo se repete; $\frac{1}{27} = \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{9} = \frac{0,111111...}{3} = 0,037037037...$, três algarismos se repetem; $\frac{1}{81} = \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{27} = \frac{0.037037037...}{3} = 0,123456790123456790...$, nove algarismos se repetem. Dê um exemplo de um número racional de tal modo que a parte que se repete tenha 81 algarismos.

**32)** (Olimpíada do Ceará-98) Encontre duas frações com numeradores inteiros positivos e denominadores 7 e 9 de tal modo que a soma delas seja $\frac{73}{63}$.

**33)** (Olimpíada do Espírito Santo-03) Qual das frações é a maior,

$$\frac{123456789123}{123456789124} \text{ ou } \frac{123456789124}{123456789125}?$$

Não faça a divisão. Dê argumentos!

**34)** (Olimpíada de Campina Grande-04) Encontre a menor fração que multiplicada tanto por $\frac{65}{616}$ como por $\frac{13}{792}$ dá um número inteiro positivo.

**35)** (OBM-97) A fortuna de João foi dividida da seguinte forma. Um quinto para seu irmão mais velho, um sexto do restante para seu irmão mais novo e partes iguais do restante para cada um de seus 12 filhos. Que fração da fortuna cada filho recebeu?

A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{15}$ E) $\frac{1}{14}$

**36)** (OBM-97) Se p e q são inteiros positivos tais que $\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15}$, o menor valor que q pode ter é:

A) 6 B) 7 C) 25 D) 30 E) 60

**37)** (OBM-98) O número que devemos somar ao numerador e subtrair do denominador da fração $\frac{1478}{5394}$ para transformá-la na sua inversa é:

A) 3.916 B) 3.913 C) 3.915 D) 3.912 E) 3.917

**38)** (OBM-99) Qual o 1999º algarismo após a vírgula na representação decimal de $\frac{4}{37}$?

a) 0 b) 1 c) 2 D) 7 E) 8

**39)** (OBM-02) Se $\frac{p}{q}$ é a fração irredutível equivalente a $\frac{6,888...}{2,444...}$ o valor de $p + q$ é igual a:

A) 38 B) 39 C) 40 D) 41 E) 42

**Racionalização de denominadores irracionais**

1) (ESSA-86) Racionalizando-se a expressão $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^{n-2}}}$, obtemos:

(A) $\sqrt[n]{a^{m+n-2}}$ (B) $\frac{\sqrt[n]{a^{m+2}}}{a}$ (C) $\sqrt[n]{a^{m-n+2}}$

(D) $m + n - 2$ (E) $m - n - 2$

2) (CM Brasília-03) Racionalizando a expressão $\frac{x^2}{\sqrt{2x^2+\sqrt{3x^4}}}$, com $x > 0$, obtém-se:

a) $\sqrt{2x^2+\sqrt{3x^4}}$ b) $\sqrt{2x^2-\sqrt{3x^4}}$ c) $x\sqrt{2+\sqrt{3}}$

d) $x\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}x$

3) (CM Brasília-09) Simplifique a expressão $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+2\sqrt{15}$. O resultado é um número:

A ( ) Irracional
B ( ) irracional e menor que 1
C ( ) Inteiro e menor que
D ( ) Múltiplo de 5
E ( ) Racional e compreendido entre 0 e 5

4) (CM Fortaleza-06) A expressão $\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{2}{7}}$ é igual a:

a) $-1$ b) $\frac{\sqrt{14}}{5}$ c) $\frac{5}{\sqrt{15}}$ d) $\frac{14}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{\sqrt{14}}$

5) (CM RJ-03) Considere as expressões $M=\frac{1+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ e $N=\frac{\sqrt[3]{16}-1}{\sqrt[3]{4}+1}$. O valor de $\frac{M}{N}$ é:

a) 1 b) $\sqrt[3]{2}+1$ c) $\sqrt[3]{4}-1$ d) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$ e) $\sqrt[3]{2}-1$

6) (CM RJ-05) Racionalizando o denominador da fração $\frac{5}{\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{196}+\sqrt[3]{49}}$, obtemos:

a) $3+\sqrt[3]{2}$ b) $3-\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}$ d) $5+\sqrt[3]{5}$ e) $7+\sqrt[3]{2}$

7) (CM RJ-06) Simplificando

$$\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}+\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}$$, encontramos:

a) 0 b) 1 c) $2a^2$ d) $\sqrt{a^2-1}$ e) $\sqrt{a^2+1}$

8) (CM Santa Maria-19) Na semana que antecedeu o exame da 2ª fase de 2018, buscando aprimoramento contínuo, o professor apresentou aos alunos a expressão:

$$y=\frac{(\sqrt{3+\sqrt{5}}).\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{6}+2}$$

Assim, podemos afirmar que a forma simplificada encontrada foi:

a) $\sqrt{3}+5$ b) $\sqrt{5}+4$ c) $\sqrt{6}+2$ d) $\sqrt{6}-2$ e) $\sqrt{11}+3$

9) (Colégio Naval-76) Simplificar a expressão $\frac{A\sqrt{A}-3\sqrt{3}}{\sqrt{A}-\sqrt{3}}$

(A) $A-9+A\sqrt{3}$ (B) $A+3+\sqrt{3A}$ (C) $A-3+\sqrt{A}$

(D) $3-A+\sqrt{3}$ (E) $9+\sqrt{A}$

10) (Colégio Naval-88) O denominador racionalizando de $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}+1}$ é

(A) 10 (B) 8 (C) 4 (D) 3 (E) 2

11) (Colégio Naval-90) O denominador da fração irredutível resultante da racionalização de $\frac{1}{6\sqrt{50}-5\sqrt{75}-\sqrt{128}-16\sqrt{48}}$ é

(A) 11 (B) 22 (C) 33 (D) 44 (E) 55

12) (Colégio Naval-91) O valor de $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$ é:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) $2\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{2}$

**13)** (Colégio Naval-94) O número $\frac{1}{\sqrt[4]{2\sqrt{2}+3}}$ é igual a:

a) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ b) $\sqrt{\sqrt{2}+2}$ c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ d) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{1-\sqrt{2}}$

**14)** (Epcar-19) Considere os números reais x, y e z, tais que:

$x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$y = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$z = \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right).\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}$

Simplificando a expressão $(x.y.z)^{-1}.\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, obtém-se

a) $2-\sqrt{3}$ b) 1 c) $2+\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$

**15)** (Epcar-16) O valor da soma

$$S = \sqrt{4} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{196}+\sqrt{195}}$$

é um número

a) natural menor que 10
b) natural maior que 10
c) racional não inteiro.
d) irracional.

**16)** (CM Santa Maria-19) O enunciado de um desafio de radiciação apresentava a expressão numérica a seguir:

$$\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$

Da análise dos dados, simplifique a expressão e marque a alternativa correta.

a) $\frac{22}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ c) $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ d) $-\frac{22}{5}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

**16)** (Olimpíada do Ceará-84) Sejam $A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e $C = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Verifique que $2B = A + C$.

17) (Olimpíada de Campina Grande-99) A fração $\frac{2}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$ é igual a:

a) $\frac{2\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)}{5}$ b) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ c) $\frac{3\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)}{5}$

d) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}$ d) $3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$

18) (AIME-05) Seja $x=\frac{4}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)}$. Determine $(x+1)^{48}$.

19) (Olimpíada da Noruega-95) Prove que se $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, então $x+y=0$.

20) Racionalize a seguinte fração: $\frac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

21) Racionalize a seguinte fração $\frac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}$.

22) Se $x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=20$, calcule o valor de:

$$x^2+\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{x^4-1}}.$$

23) (Olimpíada do Canadá-69) Determine qual dos seguintes números:

$$a=\sqrt{c+1}-\sqrt{c} \quad \text{ou} \quad b=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$$

é maior para todo real $c \geq 1$.

24) (OBM-11) Sendo a e b inteiros tais que $(1+\sqrt{2})^{2011}=a+b\sqrt{2}$, $(1-\sqrt{2})^{2010}$ é igual a

a) $a+2b+(a-b)\sqrt{2}$ b) $a-2b+(a-b)\sqrt{2}$

c) $a+2b+(b-a)\sqrt{2}$ d) $2b-a+(b-a)\sqrt{2}$

e) $a+2b-(a+b)\sqrt{2}$

# EQUAÇÕES

## 8.1. IDENTIDADES E EQUAÇÕES

Identidade algébrica é uma expressão algébrica válida para todos os possíveis valores que as variáveis envolvidas podem assumir. Por exemplo, a expressão $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ é uma identidade, pois é válida para quaisquer valores reais que sejam atribuídos para x e y. Foi destacado que uma identidade é válida para todos os "possíveis valores das variáveis", pois, pode ocorrer que, para determinados valores das variáveis, surjam nas expressões envolvidas operações não definidas, tais como divisão por 0, raiz quadrada de número negativo, etc. Por exemplo, $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ também é uma identidade válida para todos os possíveis valores de x, desde que $x \neq 1$. Do mesmo modo, a identidade $\sqrt{x^2} = x$ é válida para todo x não negativo. No caso de uma identidade algébrica, o desafio é demonstrar tal identidade e não resolvê-la.

Equação é uma expressão matemática válida para valores pontuais das variáveis, quando é válida, uma vez que existem equações que nunca são satisfeitas. Por exemplo, a equação $2x - 4 = 0$ é válida somente para $x = 2$. A equação algébrica $x^2 - 5x + 6 = 0$ é válida apenas para $x = 2$ e $x = 3$. Resolver uma equação significa encontrar suas raízes e denomina-se conjunto solução o conjunto cujos elementos são todas as raízes da equação. Por exemplo, na resolução da seguinte equação: $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$, encontra-se o conjunto solução $S = \{1, 2, 5\}$.

Sistema de equações é um conjunto de equações que são satisfeitas simultaneamente pelos mesmos valores das variáveis. O conjunto solução de um sistema de equações é o conjunto de todas as n-ênuplas ordenadas que representam as possíveis soluções do sistema. Por exemplo, na resolução do sistema de equações $\begin{cases} x^2 + xy = 3x \\ xy - y^2 = y \end{cases}$ encontra-se dois pares de soluções: $x = 0$ e $y = 0$, ou $x = 2$ e $y = 1$. O conjunto solução deste sistema, portanto, é dado por $S = \{(0, 0), (2, 1)\}$. Fica claro que o primeiro número de cada par que forma o conjunto solução representa um valor solução para x e o segundo número representa um valor solução para y, associado ao x do mesmo par.

Duas equações são denominadas equivalentes se possuem o mesmo conjunto solução. Por exemplo, as equações $x^3 - x = 0$ e $|x| = x^2$ possuem o mesmo conjunto solução $S = \{0, 1, -1\}$.

## 8.2. PRINCÍPIOS GERAIS SOBRE A TRANSFORMAÇÃO DE EQUAÇÕES

Na maioria dos casos, a resolução de uma equação algébrica envolve uma série de transformações da equação proposta e das que vão surgindo ao longo das transformações – sempre equivalentes à equação original – até que em uma das equações obtidas seja possível determinar todas as raízes. Estas transformações são baseadas no seguinte axioma: "Uma igualdade não se altera quando os seus dois membros sofrem as mesmas modificações". Abaixo seguem as possíveis transformações que podem ser aplicadas a uma equação algébrica e as respectivas consequências de aplicar cada transformação.

**1) Somar ou subtrair o mesmo número ou equação aos dois lados da igualdade:** Uma equação não se altera quando aos dois lados da igualdade é somado ou subtraído o mesmo número ou a mesma expressão algébrica. Em linguajar matemático:

$$F_1(x) = F_2(x) \Leftrightarrow F_1(x) \pm G(x) = F_2(x) \pm G(x)$$

Neste caso, a equação original e a equação transformada possuem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, na determinação das raízes reais da equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$, pode-se somar aos dois lados da equação o número 1:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 + 1 = 0 + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 2 + 1 = 1 \Leftrightarrow$$
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 1 \overset{x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Logo, o conjunto solução, no campo dos números reais da equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$ é $S = \{2\}$.

**2) Multiplicar ou dividir pelo mesmo número ou equação nos dois lados da igualdade:** Uma equação não se altera quando os seus dois membros são multiplicados ou divididos pelo mesmo número (distinto de zero) ou pela mesma expressão algébrica:

i) $F_1(x) = F_2(x) \Leftrightarrow F_1(x).G(x) = F_2(x).G(x),\ G(x) \neq 0.$

ii) $F_1(x) = F_2(x) \Leftrightarrow \dfrac{F_1(x)}{G(x)} = \dfrac{F_2(x)}{G(x)},\ G(x) \neq 0.$

Por exemplo, na resolução da equação $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$, pode-se dividir os dois lados da igualdade por $x^2$ ($x \neq 0$):

$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0 \quad (\div x^2) \Rightarrow 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0 \Rightarrow 2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0 \Rightarrow$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x+\frac{1}{x}\right) + 10 = 0 \quad \overset{y=x+\frac{1}{x}}{\Rightarrow} \quad 2y^2 - 9y + 10 = 0 \Rightarrow (2y-5)(y-2) = 0$$

i) $y = 2$: $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

ii) $y = \frac{5}{2}$: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$

Desta forma, pode-se afirmar que o conjunto solução da equação proposta $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, é $S = \{1, 2, 1/2\}$.

**Observações:**

- Em alguns casos, ao multiplicarmos os dois membros de uma equação pela mesma expressão algébrica, raízes estranhas são acrescentadas à equação original, exatamente as raízes da expressão que foi multiplicada aos dois membros da equação original. Por exemplo:

$x - 5 = 2 \Rightarrow (x-5)(x-1) = 2(x-1) \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 2x - 2 \Rightarrow$
$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x-7)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 7$ ou $x = 1$

Entretanto, note que $x = 1$ não é raiz da equação $x - 5 = 2$. Deste modo, quando é aplicada a técnica de multiplicar os dois membros de uma equação pela mesma expressão algébrica, é necessário testar se todas as raízes da equação transformada são também raízes da equação original.

- Analogamente, em alguns casos, quando dividimos os dois membros de uma equação pela mesma expressão algébrica, a equação transformada pode não possuir todas as raízes da equação original. Isso ocorre, pois, as raízes da expressão que dividiu os dois membros da equação original podem ser extraídas da equação transformada. Por exemplo, ao dividirmos os membros esquerdo e direito da equação $x^3 - 2x^2 + x = x^2 - x$ por $x$ obtém-se:

$$x^3 - 2x^2 + x = x^2 - x \quad (\div x) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 1,$$

porém note que $x = 0$ é raiz da equação original, mas não da equação transformada. Isso ocorreu devido à 0 ser raiz da equação $x = 0$ e ao dividirmos a equação original por $x$, a raiz dessa expressão foi retirada da equação transformada.

Portanto, quando dividimos os dois lados de uma equação pela mesma expressão algébrica P, é necessário verificar se algumas das raízes de P são raízes da equação original.

**3) Elevar os dois lados da igualdade de uma equação a uma mesma potência positiva:** Geralmente há introdução de raízes estranhas à equação original quando elevamos os dois membros de uma equação a uma mesma potência positiva. Apesar deste inconveniente, em alguns casos é a única maneira de resolver determinada equação, sobretudo no caso da resolução de uma equação irracional. Após a determinação do conjunto solução da equação transformada, deve-se verificar quais raízes desta também são raízes da equação original.

Considere a seguinte equação: P = Q, onde P e Q são expressões algébricas. Quando os dois lados da igualdade são elevados a um mesmo expoente inteiro positivo n ocorre o seguinte:

$$P = Q \Rightarrow P^n = Q^n \Rightarrow P^n - Q^n = 0 \Rightarrow$$
$$(P - Q)(P^{n-1} + P^{n-2}Q + P^{n-3}Q^2 + \ldots + Q^{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$P = Q \text{ ou } P^{n-1} + P^{n-2}Q + P^{n-3}Q^2 + \ldots + Q^{n-1} = 0$$

Assim, além das raízes da equação original (P = Q), ao elevarmos os dois lados de uma equação a um mesmo expoente inteiro positivo n, a equação transformada possui como raízes os valores das variáveis que satisfazem a equação:

$$P^{n-1} + P^{n-2}Q + P^{n-3}Q^2 + \ldots + Q^{n-1} = 0.$$

Por exemplo, na resolução da equação $x - 2 + 3\sqrt{x-2} = 0$, pode-se proceder a seguinte forma:

$$x - 2 + 3\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x-2} = 2 - x \Rightarrow (3\sqrt{x-2})^2 = (2-x)^2 \Rightarrow$$
$$9x - 18 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 22 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-11) = 0 \Rightarrow$$
$$x = 2 \text{ ou } x = 11$$

Agora, os valores encontrados, x = 2 e x = 11, devem ser testados para verificar se realmente são raízes da equação original. Aplicando x = 2 em $x - 2 + 3\sqrt{x-2} = 0$ verifica-se que a equação é perfeitamente satisfeita:

$$2 - 2 + 3\sqrt{2-2} = 0$$

Entretanto, aplicando x = 11, observa-se que a equação original não é satisfeita:

$$11 - 2 + 3\sqrt{11-2} = 9 + 3.3 = 18 \neq 0.$$

Assim, conclui-se que apenas x = 2 é raiz de $x - 2 + 3\sqrt{x-2} = 0$.

## Exercícios Resolvidos

1) (OBM-02) Vamos provar que 4 é maior que 4.
Sejam a e b dois números tais que $a > 4$ e $a = b$.
1) Vamos subtrair 4 dos dois termos desta equação:

$$a = b$$
$$a - 4 = b - 4$$

2) Colocamos $-1$ em evidência no segundo membro da equação:

$$a - 4 = -1\ (-b + 4)$$
$$a - 4 = -1\ (4 - b)$$

3) Elevamos ambos os termos da equação ao quadrado:

$$(a-4)^2 = [-1 \cdot (4-b)]^2$$
$$(a-4)^2 = (-1)^2 (4-b)^2$$
$$(a-4)^2 = 1 \cdot (4-b)^2$$
$$(a-4)^2 = (4-b)^2$$

4) Extraímos a raiz quadrada dos dois membros da equação:

$$\sqrt{(a-4)^2} = \sqrt{(4-b)^2}$$
$$a - 4 = 4 - b$$

5) Como $a = b$, substituímos b por a

$$a - 4 = 4 - a$$

6) Resolvemos a equação:

$$a - 4 = 4 - a$$
$$2a = 8$$
$$a = 4$$

Como escolhemos a tal que $a > 4$, chegamos à inacreditável conclusão de que $4 > 4$.
Onde está o erro no argumento acima?
A) Na passagem 2. B) Na passagem 3. C) Na passagem 4.
D) Na passagem 5. E) Na passagem 6.
**Solução: Alternativa C**
O erro está na passagem 4. Note que no final da passagem 1 tem-se $a - 4 = b - 4$, enquanto que no final da passagem 4 tem-se $a - 4 = 4 - b$, uma clara contradição.
Sabe-se que a operação matemática raiz quadrada fornece como resultado apenas números maiores ou iguais a zero. Como $a > 4$ e $b > 4$ então $\sqrt{(4-b)^2}$ vale na verdade $b - 4$, e não $4 - b$, como indica, erradamente, a passagem 4.

## 8.3. EQUAÇÕES DO 1° GRAU

Equação do 1° grau é toda equação do tipo P = Q, onde P e Q são expressões algébricas onde uma delas tem grau igual a 1 e a outra grau menor ou igual a um. Por exemplo, a equação $3x + y - z = 5$ é uma equação do 1° grau pois $3x + y - z$ possui grau um e 5 possui grau zero. Neste livro estudaremos somente as equações do 1° grau a uma variável. No tópico sobre sistemas de duas ou mais equações serão analisadas as situações envolvendo expressões do 1° grau e mais de uma variável.

### 8.3.1. Resolução

O 1° passo na resolução de uma equação de 1° grau é manter de um mesmo lado da equação (geralmente o lado esquerdo) todos os termos que envolvem apenas a variável (associada a seu coeficiente) e manter do outro lado da igualdade (geralmente o lado direito) todos os termos independentes (números ou expressões que independam da variável). Após serem efetuadas os respectivos cálculos ou fatorações, pode-se reduzir toda equação do 1° grau à forma $Ax = B$, onde A e B representam números ou expressões algébricas independentes de x. Deste modo, se $A \neq 0$, passando A dividindo para o outro membro da equação:

$$x = \frac{B}{A}$$

que é a fórmula geral de resolução das equações de 1° grau.

Como exemplo, observe a resolução da equação abaixo:

$$7x - 2x + 1 = 6x - 5x + 13 \Rightarrow 5x = x + 13 - 1 \Rightarrow 5x - x = 12 \Rightarrow$$

$$4x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{4} \Rightarrow x = 3$$

### 8.3.2. Questões contextualizadas

Em alguns casos a equação a ser resolvida não é fornecida. Na verdade, é descrita uma situação típica do cotidiano, que deve ser algebrizada de modo que uma equação seja construída com os dados da situação. Por exemplo, suponha que seja dado que Rita e Ana foram para a colheita de maçã. Sabendo que ao todo colheram 300 kg de maçãs, tendo a Rita colhido o quádruplo da quantidade de maçãs que a Ana colheu, é possível algebrizar esta situação da seguinte maneira:

- suponha que x é a quantidade de maçãs colhidas por Ana;
- da situação proposta conclui-se que Rita colheu 4x maçãs;
- como o total colhido foi de 300 kg: $x + 4x = 300 \Rightarrow 5x = 300 \Rightarrow x = 60$ kg
- logo, Rita colheu 240 kg e Ana colheu 60 kg

### 8.3.3. Discussão da fórmula

Vamos agora analisar todos os aspectos relativos os possíveis valores de A e B e suas implicações na raiz da equação.

**i)** $A \neq 0$ **e** $B \neq 0$: a equação possui exatamente uma raiz não nula dada por $x = \frac{B}{A}$

**ii)** $A \neq 0$ **e** $B = 0$: a equação admite somente a raiz $x = 0$

**iii)** $A = 0$ **e** $B \neq 0$: neste caso não é permitido passar A dividindo para o outro lado da equação $Ax = B$. Como não existe nenhum número que multiplicado por zero forneça resultado diferente de zero, então a equação não admite nenhuma raiz. Por exemplo: $3x - x = 8x - 6x + 5 \Rightarrow 2x = 2x + 5 \Rightarrow 0.x = 5 \Rightarrow$ nenhum número pode satisfazer a equação.

**iv)** $A = 0$ **e** $B = 0$: mais uma vez não é permitido passar A dividindo o membro direito de $Ax = B$. Como todo número real multiplicado por zero tem como resultado o próprio zero, então qualquer número real satisfaz a equação, fazendo com que admita infinitas raízes. Por exemplo: $4x - 3x + 2 = 7x - 6x + 2 \Rightarrow$
$x + 2 = x + 2 \Rightarrow 0.x = 0 \Rightarrow$ todo x real é raiz

## Exercícios Resolvidos

1) (EPCAr-02) O valor de x que é solução da equação $3x - 2(x-5) - \frac{5-3x}{2} = 0$ é tal que

a) $-6 < x < 0$ c) $3 < x < 10$
b) $-12 < x < -8$ d) $12 < x < 18$

**Solução: Alternativa A**

Desenvolvendo a expressão tem-se que:

$$3x - 2x + 10 - \frac{5}{2} + \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow 3x - 2x + \frac{3x}{2} = -10 + \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{6x - 4x + 3x}{2} = \frac{-20 + 5}{2} \Rightarrow \frac{5x}{\not 2} = -\frac{15}{\not 2} \Rightarrow 5x = -15 \Rightarrow x = -3$$

Logo, a solução da equação está no intervalo $-6 < x < 0$

2) (EPCAr-02) Uma senhora vai à feira e gasta, em frutas, 2/9 do que tem na bolsa. Gasta depois 3/7 do resto em verduras e ainda lhe sobram R$ 8,00. Ela levava, em reais, ao sair de casa

a) 45,00 b) 36,00 c) 27,00 d) 18,00

**Solução: Alternativa D**

Suponha que x é o valor, em reais, que a senhora possuía ao sair de casa.

O valor gasto na feira, em reais, é igual a $\frac{2x}{9}$.

Assim, depois da feira sobram $x - \frac{2x}{9} = \frac{7x}{9}$ reais.

Em verduras, gastou $\frac{3}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}x}{9} = \frac{x}{3}$. Como sobraram R$ 8,00, tem-se que:

$$x = \frac{2x}{9} + \frac{x}{3} + 8 \Rightarrow x - \frac{2x}{9} - \frac{x}{3} = 8 \Rightarrow \frac{9x - 2x - 3x}{9} = 8 \Rightarrow \frac{4x}{9} = 8 \Rightarrow$$

x = 18,00 reais

**3)** (Colégio Naval-94) Considere a equação do primeiro grau em "x": $m^2x + 3 = m + 9x$. Pode-se afirmar que a equação tem conjunto verdade unitário se:

a) m = 3 c) m ≠ 3 e) m ≠ 3 e m ≠ -3

b) m = -3 d) m ≠ -3

**Solução: Alternativa E**

$m^2x + 3 = m + 9x \Rightarrow m^2x - 9x = m - 3 \Rightarrow x(m^2 - 9) = m - 3 \Rightarrow$

$x(m - 3)(m + 3) = m - 3$

Se m = então a equação admite infinitas soluções, pois para qualquer valor real de x teremos os dois membros da equação fornecendo valor zero.

Se m = – 3 a equação não admite soluções, pois o lado esquerdo da igualdade será sempre igual a zero, independentemente do valor de x, enquanto que o lado direito não será igual a zero.

Se m ≠ 3 e m ≠ – 3, então é possível cancelar o termos m – 3 nos dois membros da igualdade e também é possível passar m + 3 dividindo para o membro direito da igualdade, fazendo com que a equação possua solução única x = 1/(m + 3). Logo, a alternativa correta é a letra E.

**4)** (EsPCEx-02) Em uma empresa, o acesso a uma área restrita é feito digitando uma senha que é mudada diariamente. Para a obtenção da senha, utiliza-se uma operação matemática "#" definida por a#b = 4a(a + 2b). A senha a ser digitada é o resultado da conversão de um código formado por três algarismos, xyz, através da expressão x#(y#z). Sabendo que a senha a ser digitada é 2660, e o código correspondente é 52z, então o algarismo z é

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

**Solução: Alternativa B**

Sendo o código de $(xyz)_{10}$ dado por x#(y#z), desde que 52z é o código correspondente da senha 2660:

$$2660 = 5\#(2\#z) = 5\#[4.2(2 + 2z)] = 5\#(16 + 16z) =$$
$$= 4.5(5 + 32 + 32z) = 20(37 + 32z) \Rightarrow$$
$$133 = 37 + 32z \Rightarrow 96 = 32z \Rightarrow z = 3$$

5) Dado que a equação $a(2x + 3) + 3bx = 12x + 5$ possui infinitas soluções para x, determine os valores e a e b.

**Solução:**

$a(2x + 3) + 3bx = 12x + 5 \Leftrightarrow (2a + 3b - 12)x = 5 - 3a$

Desde que esta equação admite infinitas soluções, então tem-se, necessariamente, que:

i) $5 - 3a = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$.

ii) $2a + 3b - 12 = 0 \Rightarrow b = \frac{26}{9}$

6) Se a, b, c são constantes positivas, resolva a equação:

$$\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$$

**Solução:**

Passando o número 3 do membro direito para o membro esquerdo da equação:

$$\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x-a-b}{c} - 1\right) + \left(\frac{x-b-c}{a} - 1\right) + \left(\frac{x-c-a}{b} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-a-b-c}{a} + \frac{x-a-b-c}{b} + \frac{x-a-b-c}{c} = 0 \Leftrightarrow |x-(a+b+c)|\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$$

Desde que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 0$ segue que $x = a + b + c$.

7) Se os números positivos a, b, c satisfazem abc = 1, resolva a equação em x:

$$\frac{2ax}{ab+a+1} + \frac{2bx}{bc+b+1} + \frac{2cx}{ca+c+1} = 1$$

**Solução:**

Multiplicando o numerador e o denominador do 1° termo por bc e do 3° termo por b:

$$\frac{2ax}{ab+a+1} + \frac{2bx}{bc+b+1} + \frac{2cx}{ca+c+1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2abcx}{ab.bc+a.bc+bc} + \frac{2bx}{bc+b+1} + \frac{2bcx}{ca.b+c.b+b} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{b+1+bc} + \frac{2bx}{bc+b+1} + \frac{2bcx}{1+bc+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{2(1+b+bc)x}{bc+b+1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

### 8.3.2. Sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas

Depois de efetuados os respectivos cálculos, todo sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas (variáveis) pode ser reduzido a $\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$. Cada uma das equações é de 1° grau e, neste caso, as incógnitas são x e y, enquanto que os coeficientes A, B, D e E, bem como os termos independentes C e F, representam números ou expressões algébricas independentes de x e y. Por exemplo, o sistema $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$ pode ser classificado como um sistema de equações do 1° grau com duas equações e duas incógnitas. Note que não é obrigatório que as duas equações contenham as duas incógnitas. Por exemplo, o sistema $\begin{cases} 2x = 10 \\ x - 8y = 1 \end{cases}$ também pode ser classificado como um sistema de equações do 1° grau com duas equações e duas incógnitas.

#### 8.3.2.1. Métodos de resolução de um sistema de 1° grau

Agora serão apresentados os métodos para determinação das raízes de um sistema de duas equações e duas variáveis. Na verdade, os métodos que serão apresentados podem ser utilizados para resolver sistemas do 1° grau para uma quantidade qualquer de equações e variáveis. No caso dos sistemas de duas equações e duas variáveis, os métodos são úteis quando todos os quatro coeficientes são distintos de zero. Em sistemas em que pelo menos um dos coeficientes é igual a zero, basta uma simples substituição para resolver o sistema de forma bem rápida. Por exemplo, no sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 3x = 6 \end{cases}$, a 2ª equação já fornece diretamente o valor de x, que vale 2 e substituindo este valor da 1ª equação obtém-se diretamente que y = 2.

Note também que o objetivo de todos os três métodos é, através de uma operação algébrica, eliminar uma das variáveis de modo que seja determinada uma equação em apenas uma das variáveis. Assim que o valor desta variável for determinado, basta uma simples substituição em qualquer uma das equações originais para determinar o valor da outra variável.

**8.3.2.1.1. Método da comparação**

Consiste em isolar a mesma variável nas duas equações e posteriormente igualar as expressões obtidas. A equação obtida é de 1° grau em uma variável, cuja resolução é imediata. Substituindo o valor obtido desta variável em qualquer das equações originais obtém-se o valor da outra variável.

Como exemplo, vamos aplicar este método para resolver o seguinte sistema de equações do 1° grau: $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$.

Isolando x nas duas equações obtém-se:

i) $x = -5 + 2y$ (1)

ii) $x = \dfrac{4 - 3y}{2}$ (2)

Igualando as duas expressões:

$$-5 + 2y = \frac{4 - 3y}{2} \Rightarrow -10 + 4y = 4 - 3y \Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo na equação (2): $x = -5 + 2.2 \Rightarrow x = -1$

Desta forma, o conjunto solução do sistema é $(-1, 2)$.

**Obs:** De modo a agilizar o trabalho algébrico e assim conseguir uma solução mais rápida, é interessante que a variável a ser isolada seja a que possua uma maior quantidade de coeficientes iguais a 1 ou – 1.

**8.3.2.1.2. Método da substituição**

Consiste em isolar uma das variáveis em uma equação e substituir seu valor na outra equação. A equação obtida é de 1° grau em uma das variáveis e após sua resolução o valor obtido da variável deve ser substituído em qualquer uma das equações originais para encontrar o valor da outra variável.

O sistema seguinte será resolvido utilizando o método da substituição: $\begin{cases} 4x - 3y = -9 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$.

Isolando x na 1ª equação obtém-se: $x = \dfrac{-9 + 3y}{4}$ (1)

Substituindo este valor de x na 2ª equação:

$$2\left(\frac{-9 + 3y}{4}\right) + 5y = -1 \Rightarrow \frac{-9 + 3y}{2} + 5y = -1 \Rightarrow -9 + 3y + 10y = -2 \Rightarrow$$

$13y = 7 \Rightarrow y = \dfrac{7}{13}$

Substituindo em (1): $x = \dfrac{-9+3.\frac{7}{13}}{4} = \dfrac{-117+21}{52} = -\dfrac{96}{52} = -\dfrac{24}{13}$

Logo, a solução do sistema é $\left(-\dfrac{24}{13}, \dfrac{7}{13}\right)$.

Obs: Se for isolada, em uma das duas equações, uma variável cujo coeficiente é igual a 1, então o trabalho algébrico posterior é facilitado.

**8.3.2.1.3. Método da adição (redução a coeficientes simétricos)**

Consiste em multiplicar as duas equações (possivelmente somente uma) de modo que apareçam coeficientes simétricos em uma das variáveis, nas duas equações. Assim, ao somarmos as duas equações obteremos uma equação de 1° grau em somente uma variável, cuja solução é imediata. Depois, basta uma simples substituição em qualquer uma das equações originais para determinar o valor da outra variável. Este método será aplicado para resolver o seguinte sistema: $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$.

Multiplicando a 1ª equação por 5 e a 2ª equação por 3 obtém-se:

$$\begin{cases} 25x-15y=10 \\ 6x+15y=21 \end{cases}.$$

Somando estas duas equações: $31x = 31 \Rightarrow x = 1$

Substituindo na 2ª equação: $2.1 + 5y = 7 \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1$

Logo, a solução do sistema é $S = (1, 1)$

Note, caso ocorra em um sistema de equações, que se um coeficiente de uma das variáveis for múltiplo do coeficiente da mesma variável na outra equação, então é suficiente multiplicar apenas uma das equações para que surjam coeficientes simétricos. Por exemplo, no sistema $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 4x+7y=9 \end{cases}$ basta multiplicar a 2ª equação por $-2$, onde obtém-se o sistema: $\begin{cases} -4x-10y=-6 \\ 4x+7y=9 \end{cases}$. Somando as duas equações:

$$-3y = 3 \Rightarrow y = -1$$

Substituindo na 1ª equação: $2x + 5(-1) = 3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

Portanto, a solução do sistema é $x = 4$ e $y = -1$.

### 8.3.3. Sistema de três equações do 1º grau com três incógnitas

Todo sistema que pode ser reduzido à forma $\begin{cases} A_1x + A_2y + A_3z = A_4 \\ B_1x + B_2y + B_3z = B_4 \\ C_1x + C_2y + C_3z = C_4 \end{cases}$ é denominado de sistema do 1° grau com três incógnitas. Neste caso, x, y e z são as incógnitas (variáveis), $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $C_1$, $C_2$ e $C_3$ são os coeficientes e $A_4$, $B_4$ e $C_4$ são os termos independentes. Se substituirmos $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$ no sistema e este é satisfeito então afirma-se que $(x_0, y_0, z_0)$ é solução do sistema. Por exemplo, no sistema $\begin{cases} x - 3y + z = 7 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y - 5z = -1 \end{cases}$ verifica-se que se fizermos $x = 1$, $y = -2$ e $z = 0$ o sistema é satisfeito. Assim, pode-se afirmar que $(1, -2, 0)$ é solução do sistema apresentado.

#### 8.3.3.1. Métodos de resolução de um sistema de 1° grau com três incógnitas

Os métodos de resolução de um sistema de 1° grau com três incógnitas são os mesmos já estudados na resolução dos sistemas com duas incógnitas. O procedimento de resolução de cada método é utilizado agora duas vezes: uma primeira vez para eliminar uma das variáveis de modo a determinar um sistema com as outras duas incógnitas e uma segunda vez para resolver este sistema de duas incógnitas. Uma simples substituição dos valores encontrados para estas duas variáveis em uma das equações originais é necessária para a determinação da incógnita que foi eliminada, desde que a equação escolhida contenha esta incógnita. Cada um dos métodos vai ser apresentado a partir de exemplos.

##### 8.3.3.1.1. Método da comparação

Considere o sistema $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x - y - z = 4 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$.

Isolando y nas três equações obtém-se:

$y = 5 - x + z$ (1) $\qquad y = -4 + 2x - z$ (2) $\qquad y = 6 + x + 2z$ (3)

A partir de (1) e (2) conclui-se que:

$$5 - x + z = -4 + 2x - z \Rightarrow 3x - 2z = 9 \quad (4)$$

A partir de (2) e (3) conclui-se que:

$$-4 + 2x - z = 6 + x + 2z \Rightarrow x - 3z = 10 \quad (5)$$

Isolando x nas equações (4) e (5): $x = 3 + \frac{2z}{3}$ (6) $x = 10 + 3z$ (7)

Logo: $3 + \frac{2z}{3} = 10 + 3z \Rightarrow 3z - \frac{2z}{3} = -7 \Rightarrow \frac{7z}{3} = -7 \Rightarrow z = -3$

Substituindo na equação (7): $x = 10 + 3(-3) \Rightarrow x = 1$

Substituindo na equação (1): $y = 5 - 1 + (-3) \Rightarrow y = 1$

Assim, o conjunto solução do sistema é $S = (1, 1, -3)$

**Obs**: De modo a agilizar o trabalho algébrico e assim conseguir uma solução mais rápida, é interessante que a variável a ser isolada seja a que possua uma maior quantidade de coeficientes iguais a 1 ou – 1.

**8.3.3.1.2. Método da substituição**

O método da substituição será aplicado na resolução do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -5 \\ 5x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - z = -2 \end{cases}.$$

Isolando z na 1ª equação obtém-se $z = -5 - 2x + 3y$ (1)

Substituindo nas duas últimas equações:

i) $5x + y - (-5 - 2x + 3y) = 0 \Rightarrow 5x + y + 5 + 2x - 3y = 0 \Rightarrow$
$7x - 2y = -5$ (2)

ii) $3x + 2y - (-5 - 2x + 3y) = -2 \Rightarrow 3x + 2y + 5 + 2x - 3y = -2 \Rightarrow$
$5x - y = -7$ (3)

Isolando y na equação (3): $y = 5x + 7$ (4)

Aplicando em (2): $7x - 2(5x + 7) = -5 \Rightarrow 7x - 10x - 14 = -5 \Rightarrow$
$-3x = 9 \Rightarrow x = -3$

Substituindo este valor de x na equação (4): $y = 5(-3) + 7 = -15 + 7 = -8$

Finalmente, substituindo os valores de x e y calculados em (1):

$$z = -5 - 2(-3) + 3(-8) = -5 + 6 - 24 = -23$$

Desta forma, o conjunto solução do sistema é $S = (-3, -8, -23)$

**Obs**: Se for isolada, em uma das duas equações, uma variável cujo coeficiente é igual a 1, então o trabalho algébrico posterior é facilitado.

**8.3.3.1.3. Método da adição (redução a coeficientes simétricos)**

Seja dado o sistema $\begin{cases} 4x + 5y - 8z = 12 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \\ 6x + 7y - 3z = 9 \end{cases}$. A intenção inicial é eliminar a variável x e conseguir uma equação linear somente em y e z. Assim, multiplicando a 1ª equação por 3 e a 2ª equação por – 4 obtém-se: $\begin{cases} 12x + 15y - 24z = 36 \\ -12x + 8y - 8z = -4 \end{cases}$. Somando estas duas equações obtém-se: $23y - 32z = 32$ (1)

De forma a eliminar a variável x, utilizando agora a 2ª e a 3ª equações, deve-se multiplicar a 2ª equação por – 2 e a 3ª equação por 1, obtendo-se:

$$\begin{cases} -6x + 4y - 4z = -2 \\ 6x + 7y - 3z = 9 \end{cases}$$

Somando obtém-se: $11y - 7z = 7$ (2)

Assim, pode-se montar o sistema formado pelas equações (1) e (2):

$$\begin{cases} 23x - 32z = 32 \\ 11y - 7z = 7 \end{cases}$$

O objetivo agora é eliminar a incógnita y, de modo que sobre uma equação de 1º grau somente na variável z. Logo, multiplicando a 1ª equação por 7 e a 2ª equação por – 32:

$$\begin{cases} 161x - 224z = 224 \\ -352y + 224z = -224 \end{cases} \Rightarrow -191y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Substituindo em (2): $11.0 - 7z = 7 \Rightarrow -7z = 7 \Rightarrow z = -1$

Substituindo os valores encontrados para y e z na 1ª equação do sistema original:

$$4x + 5.0 - 8(-1) = 12 \Rightarrow 4x + 8 = 12 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = (1, 0, -1)$

## Exercícios Resolvidos

**1)** (EPCAr-02) Um caixa automático de um banco só libera notas de R$ 5,00 e R$ 10,00. Uma pessoa retirou desse caixa a importância de R$ 65,00, recebendo 10 notas. O produto do número de notas de R$ 5,00 pelo número de notas de R$ 10,00 é igual a

a) 16 b) 25 c) 24 d) 21

**Solução: Alternativa D**

Sejam x e y as quantidades de notas de R$ 5 e R$ 10, respectivamente. Como a pessoa retirou R$ 65,00, pode-se montar a seguinte equação:

$$5x + 10y = 65 \Rightarrow \cancel{5}(x + 2y) = \cancel{5}.13 \Rightarrow x + 2y = 13 \quad (1)$$

Desde que a pessoa recebeu 10 notas: $x + y = 10$

Logo, com as equações (1) e (2) pode-se montar o seguinte sistema: $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ x + y = 10 \end{cases}$

Subtraindo a 1ª equação da 2ª: $y = 13 - 10 \Rightarrow y = 3$

Substituindo na equação (2): $x + 3 = 10 \Rightarrow x = 7$

Assim, o produto das quantidades de notas vale: $x.y = 7.3. = 21$

2) (EPCAr-08) Dois irmãos gêmeos, Lucas e Mateus, em sua festa de aniversário, ganharam um certo número de camisas, cada um. Se Lucas der uma dessas camisas a Mateus, eles passarão a ter a mesma quantidade de camisas. Entretanto, se fosse Mateus que doasse a Lucas uma de suas camisas, este então teria o dobro do número de camisas de Mateus. Considerando apenas as camisas recebidas de presente no aniversário, é correto afirmar que

a) Mateus ganhou 40% menos camisas do que Lucas.

b) se x é o número de camisas de Lucas e y é o número de camisas de Mateus, então x e y são números primos entre si.

c) os dois irmãos ganharam juntos mais de 12 camisas.

d) o número que representa a quantidade de camisas que Mateus ganhou é um número divisor de 63

**Solução: Alternativa B**

Considere que x é a quantidade de camisas que ganhou Lucas e y e a quantidade que ganhou Mateus. Pelo enunciado temos duas situações:

i) $x - 1 = y + 1 \Rightarrow x - y = 2 \quad (1)$

ii) $2(y - 1) = x + 1 \Rightarrow x - 2y = -3 \quad (2)$

Multiplicando a 2ª equação por – 1 termos o seguinte sistema: $\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

Somando estas duas equações: $y = 5$

Substituindo na equação (1): $x - 5 = 2 \Rightarrow x = 7$

Portanto, observando as alternativas, a única correta é a letra B.

3) (Colégio Naval-01) Num gibi, um ser de outro planeta capturou em uma de suas viagens três tipos de animais. O primeiro tinha 4 patas e 2 chifres, o segundo 2 patas e nenhum chifre e o terceiro 4 patas e 1 chifre. Quantos animais do terceiro tipo ele capturou, sabendo que existiam 227 cabeças, 782 patas e 303 chifres?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 30

**Solução: Alternativa B**

Sejam x a quantidade de animais de 1° tipo, y de 2° tipo e z de 3° tipo. Admitindo que cada animal possui somente uma cabeça, pode-se montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 227 \\ 4x + 2y + 4z = 782 \\ 2x + 0.y + z = 303 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por 2 e 2ª por – 1/2 obtém-se: $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 454 \\ -2x - y - 2z = -391 \\ 2x + \quad z = 303 \end{cases}$

Somando a 1ª equação com a 2ª equação: $y = 63$

Substituindo o valor de y na 1ª equação do sistema original pode-se montar um sistema da 1ª com a 3ª equação: $\begin{cases} x + z = 164 \\ 2x + z = 303 \end{cases}$

Multiplicando a 1ª equação por – 1: $\begin{cases} -x - z = -164 \\ 2x + z = 303 \end{cases}$

Somando as duas equações: $x = 139$

Logo: $x + z = 164 \Rightarrow 139 + z = 164 \Rightarrow z = 25$

Assim, existem 25 animais do 3º tipo.

4) (ENEM-14) Um cliente fez um orçamento com uma cozinheira para comprar 10 centos de quibe e 15 centos de coxinha e o valor total foi de R$ 680.00. Ao finalizar a encomenda, decidiu aumentar as quantidades de salgados e acabou comprando 20 centos de quibe e 30 centos de coxinha.

Com isso, ele conseguiu um desconto de 10% no preço do cento do quibe e de 15% no preço do cento de coxinha, e o valor total da compra ficou em R$ 1182.00.

De acordo com esses dados, qual foi o valor que o cliente pagou pelo cento da coxinha?

a) R$ 23,40 b) R$ 23,80 c) R$ 24,90

d) R$ 25,30 e) R$ 37,80

**Solução: Alternativa B**

Seja x o preço original do cento do quibe e y o preço original do cento de coxinha.

A modelagem algébrica do pedido original é: $10x + 15y = 680$ (1)

No segunda pedido, devido aos descontos, o preço do centro de quibe ficou em 0,9x e o preço do cento de cozinha ficou em 0,85y.

Deste modo, a modelagem algébrica do 2º pedido é:

$20(0{,}9x) + 30(0{,}85y) = 1182 \Rightarrow 18x + 25{,}5y = 1182$ (2)

Agora deve-se resolver o sistema formado pelas equações (1) e (2). Na equação (1) pode-se isolar a variável a, obtendo $x = 68 - 1{,}5y$

Substituindo este resultado na equação (2): $18(68 - 1{,}5y) + 25{,}5y = 1181 \Rightarrow$

$1224 - 27y + 25{,}5y = 1182 \Rightarrow 1{,}5y = 42 \Rightarrow y = 28$

Note que este é o valor original do centro de cozinha. No pedido final houve um desconto de 85%, fazendo com que o valor pago seja $0{,}85 \times y = 0{,}85 \times 28 = 23{,}8$ reais

### 8.3.4. Discussão de um sistema de equações do 1° grau

#### 8.3.4.1. Equivalência entre sistemas lineares

**Definição**: Dois sistemas de equações do 1° grau são equivalentes se apresentam o mesmo conjunto solução. Por exemplo, os sistemas $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$ são equivalentes pois possuem o mesmo conjunto solução S = (1, 1).

#### 8.3.4.2. Quantidades de soluções

Em todos os exemplos apresentados para ilustrar a aplicação dos métodos de comparação, substituição e adição, na determinação da solução dos sistemas de equações de 1° grau, foi possível encontrar uma única solução para cada sistema. Entretanto, nem sempre isto ocorre. Em alguns casos o sistema possui mais de uma solução (na verdade uma quantidade infinita de soluções) e em outros casos o sistema não apresenta nenhuma solução. Na verdade, ao contrário de todos os exemplos apresentados neste livro, não é nem obrigatório que a quantidade de equação seja igual à quantidade de incógnitas em um sistema de 1° equações do grau. Assim, é necessário separar esta discussão em casos.

**1° caso**: quantidade de equações igual à quantidade de incógnitas

É possível concluir, observando cada um dos métodos de solução, que o objetivo é eliminar incógnitas de modo que seja determinada uma equação de 1° grau em apenas uma das variáveis. Esta equação, depois de realizadas as devidas simplificações, fica reduzida à forma Ax = B, onde a incógnita x foi usada apenas como exemplificação, podendo ser qualquer uma das incógnitas do sistema. De acordo com os valores de A e B tem-se a quantidade de soluções do sistema:

**i) A ≠ 0**: o sistema possui apenas uma solução, ou seja, um único valor possível para cada uma das variáveis. Quando isto ocorre denomina-se o sistema de **possível e determinado**.

**ii) A = 0 e B ≠ 0**: o sistema não apresenta solução, uma vez que não existe número real que multiplicado por zero dê resultado diferente de zero. Assim, não existem números reais que atribuídos às variáveis satisfaçam simultaneamente todas as equações do sistema. A este tipo de sistema dá-se o nome de **impossível**.

**iii) A = 0 e B = 0**: o sistema apresenta infinitas soluções, uma vez que qualquer número real multiplicado por zero dá como resultado zero. Como não é possível determinar apenas uma solução, este tipo de sistema é chamado de **possível e indeterminado**.

2º caso: quantidade de equações maior que a quantidade de incógnitas

Suponha que um sistema possua n equações e p incógnitas, onde $n > p$. Deve-se selecionar p das n equações e formar um sistema com p equações e p variáveis.

i) Se este sistema for possível e determinado, deve-se verificar se a solução deste sistema também satisfaz cada uma das $n - p$ equações restantes. Se estas $n - p$ equações foram satisfeitas então o sistema com n equações e p incógnitas é possível e determinado. Se pelo menos uma das $n - p$ equações restantes não for satisfeita pela solução do sistema com p equações então o sistema é impossível.

ii) Se este sistema for impossível então o sistema original também é impossível.

iii) Se este sistema for possível e indeterminado o sistema original, dependendo das demais $n - p$ equações, pode ser possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível. É necessário acrescentar equações, uma de cada vez, ao sistema com p equações até que se forme um sistema possível e determinado ou um sistema impossível e aí deve-se proceder como indicado nos itens i e ii acima.

3º caso: quantidade de equações inferior à quantidade de incógnitas

Neste caso o sistema pode ser possível e indeterminado ou impossível.

## Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-80) O sistema

$$\begin{cases} mx + y = 1 + 3m \\ 2x + 3y = my \end{cases}$$

(A) é possível e determinado para todo m

(B) é impossível para $m \neq 2$ e $m \neq 1$.

(C) é possível e indeterminado para $m = 2$ e $m = 1$.

(D) não é indeterminado, qualquer que seja o valor de m.

(E) não é impossível, seja qual for o valor de m.

**Solução: Alternativa D**

Na 2ª equação, pode-se tirar x em função de y:

$$2x + 3y = my \Rightarrow 2x = my - 3y \Rightarrow x = \frac{(m-3)y}{2}$$

Aplicando na 1ª equação:

$$\frac{m(m-3)}{2} + y = 3m + 1 \Rightarrow (m^2 - 3m)y + 2y = 2(3m + 1) \Rightarrow$$

$$(m^2 - 3m + 2)y = 2(3m + 1) \Rightarrow (m - 1)(m - 2)y = 2(3m + 1) \quad (1)$$

Discutindo o sistema:

- como não há nenhum valor de m que zere simultaneamente os dois membros de (1) então o sistema nunca vai ser possível e indeterminado, qualquer que seja o valor de m
- uma vez que m = 1 ou m = 2 zera o lado esquerdo de (1) mas não zera o lado direito, então para m = 1 ou m = 2 o sistema é impossível
- para $m \neq 1$ e $m \neq 2$ o sistema é possível e determinado

Desta forma, a alternativa correta é a letra D.

2) (Colégio Naval-83) O sistema $\begin{cases} 2x + 2y = b \\ 3x + ay = 4 \end{cases}$ é indeterminado. O produto ab é:

a) 12 b) 24 c) 8 d) 6 e) 18

**Solução: Alternativa C**

Multiplicando a 1ª equação por – 3 e a 2ª equação por 2: $\begin{cases} -6x - 6y = -3b \\ 6x + 2ay = 8 \end{cases}$

Somando as duas equações: $2ay - 6y = 8 - 3b \Rightarrow 2(a-3)y = 8 - 3b$

De modo que o sistema seja indeterminado, deve-se ter:

i) $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$

ii) $8 - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{8}{3}$

Assim: $a.b = 3.\frac{8}{3} = 8$

3) (EsPCEx-04) No conjunto IR, o sistema de equações $\begin{cases} ax + y = -1 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$ é:

a) possível e determinado para todo $a \neq -1/2$.
b) possível e indeterminado para a real qualquer.
c) impossível para $a = -1/2$.
d) possível e indeterminado para $x = 1/2$.
e) impossível para $a = 1/2$.

**Solução: Alternativa E**

Da 1ª equação tira-se que: $y = -ax - 1$

Da 2ª equação tira-se que: $z = -\frac{x}{2}$

Aplicando na 3ª equação: $-ax - 1 + \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x\left(\frac{1}{2} - a\right) = 3 \Rightarrow x(1 - 2a) = 6$ (1)

Analisando a equação pode-se concluir que:

• como não há nenhum valor de a que zere simultaneamente os dois membros da equação (1), então o sistema original nunca será possível e indeterminado.

• para a = 1/2 tem-se que o lado esquerdo de (1) vale zero independentemente do valor de x, enquanto que o lado direito nunca é igual a zero, configurando a situação de um sistema impossível.

• para a ≠ 1/2 o sistema é possível e determinado.

Desta maneira, a alternativa correta é a de letra E.

4) (Colégio Naval-06) Observe o sistema linear S. É correto afirmar, em relação aos parâmetros reais a, b e c, que:

$$S = \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 9 \\ ax + by = c \end{cases}$$

a) quaisquer que sejam, S será possível e determinado.
b) existem valores desses parâmetros que tornam S possível e determinado.
c) quaisquer que sejam, S será possível e indeterminado.
d) existem valores desses parâmetros que tornam S indeterminado.
e) quaisquer que sejam, S será impossível.

**Solução: Alternativa B**

Inicialmente deve-se resolver o sistema formado somente pelas equações:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por 2 e a 2ª por 3: $\begin{cases} 4x - 6y = 14 \\ 9x + 6y = 27 \end{cases}$

Somando as duas equações: $13x = 41 \Rightarrow x = \frac{41}{13}$

Substituindo na 2ª equação: $3.\frac{41}{13} + 2y = 9 \Rightarrow 2y = 9 - \frac{123}{13} \Rightarrow y = -\frac{3}{13}$

Assim, o sistema forma pelas duas primeiras equações é possível e determinado, impedindo que o sistema com três equações seja possível e indeterminado, sobrando apenas as possibilidades de sistema impossível e sistema possível e determinado. O sistema com as três equações será possível e determinado somente se a solução do sistema com duas equações satisfazer a 3ª equação:

$$a\left(\frac{41}{13}\right) + b\left(-\frac{3}{13}\right) = c \Rightarrow 41a - 3b = 13c$$

Uma vez que existem infinitos ternos ordenados (a, b, c), com a, b, c ∈ IR, de modo que 41a – 3b = 13c então existem valores desses parâmetros que tornam S possível e determinado.

Caso 41a – 3b ≠ 13c, então S será impossível. Assim, a alternativa correta é a B.

## 8.4. EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Uma equação é denominada de equação do 2º grau a uma incógnita se, após as devidas simplificações, pode ser reduzida à forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$. Por exemplo, a equação $2x^2 - 5x + 1 = 0$ é uma equação de 2º grau a uma incógnita. Algumas equações, que a princípio envolvam expressões de grau maior que 2, podem ser reduzidas à equações de 2º grau. Por exemplo, a equação $x^3 = (x + 1)^3$ envolve duas expressões algébricas de grau 3, entretanto, quando simplificadas, obtém-se uma equação do 2º grau:

$$x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Resolver uma equação do 2º grau significa encontrar suas raízes. Como veremos futuramente, no campo dos números reais uma equação do 2º grau pode apresentar duas raízes, uma raiz ou nenhuma raiz. Por exemplo, o número 1 satisfaz a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, uma vez que $1^2 - 3.1 + 2 = 0$. Assim, afirmar-se que 1 é raiz da equação de 2º grau $x^2 - 3x + 2 = 0$.

### 8.4.1. Resolução e discussão de uma equação do 2º grau

#### 8.4.1.1. Completando o quadrado perfeito

Um método de resolução de equações do 2º grau é baseado em fazer aparecer em um dos membros da equação, através de multiplicação e/ou soma de constantes reais, o conhecido produto notável $\mathbf{(mx + n)^2 = m^2x^2 + 2mnx + n^2}$. Desta forma, a equação original será equivalente a uma equação transformada na forma

$$\mathbf{(mx + n)^2 = r.}$$

Se $r \geq 0$ pode-se então tirar a raiz quadrada dos dois membros da igualdade e assim calcular as raízes da equação: $mx + n = \pm\sqrt{r} \Rightarrow x = \dfrac{-n \pm \sqrt{r}}{m}$

Note que se $r > 0$ a equação possui duas raízes reais distintas. Se $r = 0$ a equação possui uma única solução: $x = -n/m$. Por outro lado, se $r < 0$ a equação não possui raízes reais. No caso em que $r = 0$ não é necessário transformar a equação original, pois neste caso a equação fornecida já é um quadrado perfeito. Seguem alguns exemplos de cada caso citado acima.

1º caso: $r > 0$ (duas raízes reais distintas)

i) Por exemplo, considere a equação $x^2 - 6x + 5 = 0$. Se somarmos aos dois membros desta equação o número 4, obtemos no membro esquerdo da equação o quadrado perfeito $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$:

$$x^2 - 6x + 9 = 4 \Rightarrow (x - 3)^2 = 2^2 \Rightarrow x - 3 = \pm 2 \Rightarrow$$
$$x = 3 \pm 2 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

Assim, o conjunto solução da equação $x^2 - 6x + 5 = 0$ é $S = \{2, 3\}$

ii) Na equação $x^2 - 3x - 10 = 0$, de modo a fazer aparecer uma equação transformada de modo que o coeficiente de x seja par e o coeficiente de $x^2$ seja quadrado perfeito, deve-se, inicialmente, multiplicar os dois membros da igualdade por 4, obtendo-se a equação $4x^2 - 12x - 40 = 0$. De modo a fazer aparecer o quadrado perfeito $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$, no lado esquerdo da igualdade, se deve somar o número 49 aos dois lados da igualdade:

$$4x^2 - 12x - 40 + 49 = 49 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 49 \Rightarrow$$

$$(2x - 3)^2 = 7^2 \Rightarrow 2x - 3 = \pm 7 \Rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 5$$

**2º caso:** $r = 0$ (uma raiz real)

Note que na equação $9x^2 - 12x + 4 = 0$ o lado esquerdo da igualdade é igual ao desenvolvimento do quadrado perfeito $(3x - 2)^2$. Assim, tem-se que:

$$(3x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2/3$$

Logo, a única raiz da equação $9x^2 - 12x + 4 = 0$ é $x = 2/3$

**3º caso:** $r < 0$ (nenhuma raiz real)

Observe que é possível transformar o lado esquerdo da equação $x^2 - 2x + 4 = 0$ em um quadrado, basta somar o número $-3$ em ambos os lados da equação:

$$x^2 - 2x + 1 = -3 \Rightarrow (x - 1)^2 = -3$$

Como não existe número real cujo quadrado seja igual a $-3$, segue que a equação $x^2 - 2x + 4 = 0$ não possui raiz real.

### 8.4.1.2. Método de Bhaskara

O método de Bhaskara nada mais é do que uma fórmula para a determinação das raízes da equação de 2º grau como função de seus coeficientes. Esta fórmula é determinada usando a ideia do método de complementar o quadrado perfeito, agora aplicado à forma geral de uma equação de 2º grau, que é $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. De forma a fazer aparecer no lado esquerdo desta equação o desenvolvimento do quadrado perfeito de $(2ax + b)^2$, que vale $4a^2x^2 + 4abx + b^2$, deve-se inicialmente multiplicar os dois lados da equação por $4a$, obtendo-se $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$. Somando agora o número $b^2 - 4ac$ aos dois membros da igualdade, surge:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$ pode-se extrair a raiz quadrada dos dois lados da igualdade:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que a conhecida fórmula de Bhaskara, usada para a determinação das raízes de uma equação de 2º grau. Note que esta fórmula fornece dois valores para x, uma para o sinal $-$ e o outro para o sinal $+$.

O termo $b^2 - 4ac$ é denominado de discriminante da equação de 2° grau e é simbolizado por $\Delta$, que é a letra grega delta maiúsculo. Por isso, é muito comum a utilização da expressão "**delta da equação**" no lugar de "**discriminante da equação**". A expressão que fornece x pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Há três casos a considerar na utilização desta fórmula:

**1° caso**: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (duas raízes reais distintas)

Ocorre, por exemplo, na equação $x^2 - 9x - 10 = 0$, onde:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4.1.(-10) = 81 + 40 = 121.$

Logo: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2.1} = \frac{9 \pm 11}{2} \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 10$

Deste modo, o conjunto solução da equação $x^2 - 9x - 10 = 0$ é $S = \{-1, 10\}$

Portanto, pode-se enunciar que se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ a equação $ax^2 + bx + c = 0$ sempre possui duas raízes reais distintas.

**2° caso**: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ (uma raiz real)

Observando a expressão que fornece as raízes de uma equação de 2° grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, pode-se concluir que se $\Delta = 0$ a equação possui apenas uma raiz real, cujo valor é $x = -\frac{b}{2a}$. Por exemplo, na equação $25x^2 - 10x + 1 = 0$, o valor do discriminante vale:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(25)(1) = 100 - 100 = 0$

Logo, aplicando na fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2.25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

Assim, toda vez que uma equação de 2° grau apresentar $\Delta = 0$, afirma-se que esta equação possui uma única raiz real.

**3° caso**: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (nenhuma raiz real)

Uma vez que, no campo dos números reais, não está definida a operação de extração da raiz quadrada de um número negativo, quando $\Delta < 0$ a equação de 2° grau não apresenta raiz real. Neste caso, se diz que seu conjunto solução é o conjunto vazio. Por exemplo, na equação $x^2 + x + 1 = 0$ tem-se que o discriminante vale $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Logo, é possível afirmar que a equação $x^2 + x + 1 = 0$ não possui raízes reais.

Pode-se resumir então a discussão sobre as raízes de uma equação de 2° grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ no quadro abaixo:

Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ **duas raízes reais:** $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **ou** $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ **uma raiz real:** $x = -\dfrac{b}{2a}$

Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ **nenhuma raiz real**

**8.4.2. Relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau**

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$, com raízes $x_1$ e $x_2$. Suponha-se, sem perda de generalidade, que $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e que $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Deste modo, tem-se:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Resumindo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

## Exercícios Resolvidos

1) (EPCAr-05) Uma empresa produz quantidades x e y de dois modelos de camisas por hora, utilizando o mesmo processo de produção. A relação entre x e y é dada por $(y-2)(x-3) = 48$. as quantidades x e y que devem ser produzidas por hora de modo a se ter $y = 2x$ são tais que

a) $x > 10$ e $y < 20$ b) $x > 20$ e $y < 10$

c) $x < 20$ e $y < 10$ d) $x < 10$ e $y < 20$

**Solução: Alternativa D**

Se $y = 2x$ e $(y-2)(x-3) = 48$ então:

$(2x-2)(x-3) = 48 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 48 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 42 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(1)(-21)}}{2} = \dfrac{4 \pm 10}{2} \Rightarrow x = -3$ ou $x = 7$

Uma vez que x significa uma quantidade de modelos produzidos por uma empresa, só há sentido no valor positivo calculado, ou seja, x = 7. Como y = 2x então y = 14. Analisando as alternativas, verifica-se que a única correta é da letra D.

**2)** (EPCAr-00) A razão entre dois números naturais é igual a 0,333... e o quadrado do menor é igual ao maior acrescido de 10 unidades. A soma desses números é igual a

a) 3 b) 5 c) 12 d) 20

**Solução: Alternativa D**

Segundo o enunciado, pode-se escrever duas equações: $\begin{cases} \frac{x}{y} = 0,333... \\ x^2 = y + 10 \end{cases}$

Da 1ª equação, tira-se que: $\frac{x}{y} = 0,333... \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x$

Substituindo na 2ª equação: $x^2 = 3x + 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-10)}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x = -2$ ou $x = 5$

Como $x \in \mathbb{N}$, somente a raiz negativa será levada em consideração: x = 5

Assim: $y = 3x \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x + y = 20$

**3)** (Colégio Naval-95) O trinômio $y = x^2 - 14x + k$, onde k é uma constante real positiva, tem duas raízes reais distintas. A maior dessas raízes pode ser:

(A) 4 (B) 6 (C) 11 (D) 14 (E) 17

**Solução: Alternativa C**

Sabe-se que uma equação de 2º grau tem duas raízes reais distintas quando seu discriminante é maior que zero. Assim:

$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = (-14)^2 - 4(1)(k) > 0 \Rightarrow \Delta = 196 - 4k > 0 \Rightarrow \Delta = 4(49 - k) > 0$

Pode-se notar que $\Delta > 0$ quando $k < 49$. Contudo, é dado no enunciado que $k > 0$.

Portanto, $0 < 49 - k < 49 \Rightarrow 0 < \sqrt{49 - k} < 7$

As soluções do sistema são dadas por:

$x = \frac{14 \pm \sqrt{4(49-k)}}{2} = \frac{14 \pm 2\sqrt{49-k}}{2} = 7 \pm \sqrt{49-k}$,

onde a maior delas é quando aplicamos o sinal +:

$$x_{max} = 7 + \sqrt{49 - k} \Rightarrow 7 < x_{max} < 14$$

Das alternativas apresentadas, apenas o valor indicado na alternativa C está no intervalo acima.

4) (ITA-06) Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que
a) $x = 2$ não é raiz de p.
b) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.
c) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.
d) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.
e) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

**Solução 1: Alternativa B**

Como 2 é raiz de p(x) então pode-se dividir p(x) por $x - 2$, obtendo-se:
$p(x) = (x - 2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1)$
Ademais: $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x^4 - x^3 + x^2) + 3(x^3 - x^2 + x) + (x^2 - x + 1) =$
$= x^2(x^2 - x + 1) + 3x(x - x + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)$
Como o discriminante de $x^2 - x + 1$ é $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$ e o discriminante de $x^2 + 3x + 1$ é $\Delta = 3^2 - 4(1)(1) = 5 > 0$, então $x^2 - x + 1 = 0$ não possui raízes reais e $x^2 + 3x + 1 = 0$ possui duas raízes reais. Sabendo-se que $\sqrt{5}$ é um número irracional e que as raízes de $x^2 + 3x + 1 = 0$ são $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, conclui-se que p admite três raízes reais, sendo uma delas (o número 2), que é inteiro, e as outras duas são números irracionais.

**Solução 2:**

Pesquisando as raízes racionais, conclui-se que 2 é raiz. Daí, dividindo, obtém-se que: $P(x) = (x - 2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1) = (x - 2).Q(x)$
As raízes de q(x) podem ser obtidas aproveitando a "simetria dos coeficientes em relação aos extremos (com exceção do coeficiente de $-x^2$).
Como "0" não é raiz, dividindo-se a equação $q(x) = 0$ por $x^2$ e agrupando-se os termos equidistantes dos extremos: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$.

Fazendo $x + \frac{1}{x} = t$: $(t^2 - 2) + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -3$ ou $t = 1 \Leftrightarrow$

$x + \frac{1}{x} = -3$ ou $x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow$ $x^2 + 3x + 1 = 0$ e $x^2 - x + 1 = 0$, onde somente as raízes de $x^2 + 3x + 1 = 0$ são reais (e irracionais).

5) (Colégio Naval-82) Na equação $x^2 - mx - 9 = 0$, a soma dos valores de m, que fazem com que as suas raízes a e b satisfaçam a relação $2a + b = 7$ dá:
a) 3,5 b) 20 c) 10,5 d) 10 e) 9

**Solução: Alternativa C**

Relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação de 2º grau: $\begin{cases} a + b = m \\ a.b = -9 \end{cases}$

Pelo enunciado sabe-se que $2a + b = 7$, ou seja, $b = 7 - 2a$.
Substituindo na relação $a.b = -9$ tem-se que:

$a(7-2a) = -9 \Rightarrow 7a - 2a^2 = -9 \Rightarrow 2a^2 - 7a - 9 = 0 \Rightarrow$

$a = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(-9)}}{4} \Rightarrow a = \dfrac{7 \pm 11}{4} \Rightarrow a = -1$ ou $a = \dfrac{9}{2}$

i) $a = -1 \Rightarrow b = 7 - 2(-1) = 9 \Rightarrow m = a + b = -1 + 9 = 8$

ii) $a = 4{,}5 \Rightarrow b = 7 - 2(4{,}5) = -2 \Rightarrow m = a + b = 2{,}5$

Portanto, a soma dos valores possíveis de m vale $8 + 2{,}5 = 10{,}5$.

6) (Colégio Naval-93) Sendo m e n as raízes da equação $x^2 - 10x + 1 = 0$, o valor da expressão $\dfrac{1}{m^3} + \dfrac{1}{n^3}$ é

(A) 970 (B) 950 (C) 920 (D) 900 (E) 870

**Solução: Alternativa A**

Relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação de 2° grau: $\begin{cases} m + n = 10 \\ m.n = 1 \end{cases}$

Para calcular o valor de $\dfrac{1}{m^3} + \dfrac{1}{n^3}$ será usada a conhecida fatoração de $a^3 + b^3$:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$

Assim, fazendo $a = \dfrac{1}{m}$ e $b = \dfrac{1}{n}$, tem-se que:

$$\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\left[\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{3}{m.n}\right] \Rightarrow \frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} = \left(\frac{m+n}{m.n}\right)\left[\left(\frac{m+n}{m.n}\right)^2 - \frac{3}{m.n}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} = \left(\frac{10}{1}\right)\left[\left(\frac{10}{1}\right)^2 - \frac{3}{1}\right] = 10(100 - 3) = 970$$

7) (Colégio Naval-66) Dada a equação $:(m + p)x^2 - 5mx + 4m - 5p = 0$, determinar a relação entre *m* e *p*, para que as raízes somem $\dfrac{10}{3}$ e uma seja o inverso da outra.

**Solução:**

Sendo a e $\dfrac{1}{a}$ as raízes da equação, segue que: $a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow 3a^2 + 3 = 10a \Rightarrow$

$3a^2 - 10a + 3 = 0 \Rightarrow (3a - 1)(a - 3) = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$ ou $a = 3 \Rightarrow$

as raízes da equação são $\dfrac{1}{3}$ e 3.

Pela relação entre os coeficientes e as raízes:

i) $\dfrac{5m}{m + p} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow 15m = 10m + 10p \Rightarrow 5m = 10p \Rightarrow m = 2p$

ii) $\frac{4m-5p}{m+p} = 3.\frac{1}{3} \Rightarrow m + p = 4m - 5p \Rightarrow 3m = 6p \Rightarrow m = 2p$

Assim, a relação entre as m e p é m = 2p.

**8)** (Colégio Naval-69) Dada a equação $2x^2 + 8x + k = 0$, achar o valor de *k*, sabendo-se que a soma dos quadrados das raízes desta equação é 7.

**Solução:**

Sejam a e b as raízes da equação $2x^2 + 8x + k = 0$. Desta forma:

$$7 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 - 2\frac{k}{2} = 16 - k \Rightarrow k = 9$$

**9)** (CM Manaus-16) Sejam r e s as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 7x + 1 = 0$. É correto afirmar que:

a) $\sqrt{r} + \sqrt{s} = \sqrt{7}$ b) $\sqrt{r} + \sqrt{s} = \sqrt{5}$ c) $\sqrt{r} + \sqrt{s} = \sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{r} + \sqrt[4]{s} = \sqrt{3}$ e) $\sqrt[4]{r} + \sqrt[4]{s} = \sqrt{5}$

**Solução: Alternativa E**

Pela relação entre as raízes e os coeficientes segue que r + s = 7 e rs = 1.

Sejam $a = \sqrt{r} + \sqrt{s}$ e $b = \sqrt[4]{r} + \sqrt[4]{s}$.

Inicialmente note que a> 0 e b > 0, uma vez que são soma de raízes de ordem par de números positivos.

Assim: $a^2 = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2 = r + s + 2\sqrt{rs} = 7 + 2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \sqrt{r} + \sqrt{s} = 3$

Analogamente: $b^2 = (\sqrt[4]{r} + \sqrt[4]{s})^2 = \sqrt{r} + \sqrt{s} + 2\sqrt[4]{rs} = 3 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt[4]{r} + \sqrt[4]{s} = \sqrt{5}$

**10)** Se $P(x) = x^2 + ax + b$ e $Q(x) = x^2 + px + q$, determinar a condição para que os polinômios tenham uma raiz comum.

**Solução:**

Suponha que r seja a raiz comum. Assim: $r^2 + ar + b = 0$ e $r^2 + pr + q = 0$.

Subtraindo essas duas expressões: $(a - p)r + b - q = 0 \Rightarrow r = -\frac{b-q}{a-p}$.

Assim: $r^2 + ar + b = 0 \Rightarrow \left(\frac{b-q}{a-p}\right)^2 - a\frac{b-q}{a-p} + b = 0 \Rightarrow$

$(b - q)^2 - a(b - q)(a - p) + b(a - p)^2 = 0 \Rightarrow$

$(b - q)^2 + (a - p)(aq - ab + ab - bp) = 0 \Rightarrow (b - q)^2 + (p - a)(bq - ap) = 0$

### 8.4.3. Máximo e Mínimo de uma expressão algébrica de 2º grau

Sabe-se que toda expressão algébrica de 2º grau em uma variável pode ser expressão da seguinte maneira: $P = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais, com a diferente de zero. Desta forma:

$$P = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \Rightarrow$$

$$P = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow P = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Desde que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é um quadrado perfeito, então $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Assim, o sinal do termo $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ depende exclusivamente do sinal do coeficiente a. Se $a > 0$ então $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e se $a < 0$ então $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$. Além disso, pode-se notar que se $x = -\frac{b}{2a}$ tem-se que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

**1º caso: $a > 0$** $\Rightarrow P = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow$ o **valor mínimo** de P é $-\frac{\Delta}{4a}$.

P assume este valor somente quando $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, que ocorre para $x = -\frac{b}{2a}$.

**2º caso: $a < 0$** $\Rightarrow P = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow$ o **valor máximo** de P é $-\frac{\Delta}{4a}$.

P assume este valor somente quando $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, que ocorre para $x = -\frac{b}{2a}$.

Em resumo, conclui-se que toda expressão algébrica P de 2º grau da forma $P = ax^2 + bx + c$ admite um valor real mínimo se $a > 0$ ou um valor real máximo se $a < 0$. Independentemente do sinal de a, este valor extremo vale $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$, que ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Por exemplo, a expressão $P = x^2 - 4x + 3$ admite valor mínimo, uma vez que o coeficiente do termo de $x^2$ é positivo. Este valor mínimo vale:

$$P_{min} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{4.1} = -\frac{(16-12)}{4} = -1.$$

Este valor de P ocorre para x tal que: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.1} = 2$.

Por outro lado, como o coeficiente de $x^2$ na expressão $P = -x^2 + 6x + 16$ é negativo, pode-se afirmar que P admite um valor máximo dado por:

$$P_{max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(6)^2 - 4(-1)(16)}{4(-1)} = -\frac{(36+64)}{-4} = 25$$

Este valor ocorre em P para x igual a: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(-1)} = 3$

## Exercícios Resolvidos

1) (FGV-10) Um número real x, $10 \leq x \leq 110$ é tal que (x – 10)% da diferença entre 14 e x, nessa ordem, é igual ao número real y. Nessas condições, o valor máximo que y pode assumir é

a) 1/20 b) 1/21 c) 1/24 d) 1/25 e) 1/27

**Solução: Alternativa D**

Pelo enunciado, deduz-se que $y = \frac{x-10}{100}(14-x) \Rightarrow y = -\frac{x^2}{100} + \frac{6}{25}x - \frac{7}{5}$

Como o coeficiente de $x^2$ é negativo, tem-se que y admite um valor máximo, que vale:

$$y_{max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\left(\frac{6}{25}\right)^2 - 4\left(\frac{-1}{100}\right)\left(\frac{-7}{5}\right)}{4\left(\frac{-1}{100}\right)} = -\frac{\left(\frac{36}{625} - \frac{35}{625}\right)}{-\frac{1}{25}} = \frac{1}{25}$$

2) (UFPA-10) Entender as propriedades do milho, um dos mais importantes cereais produzidos no mundo é fundamental para o aumento de sua produção. Estudos recentes indicam que a área total (em $m^2$) das folhas de uma plantação de um hectare de milho é aproximada pela função $A(h) = -3h^2 + 900h$, sendo h a altura da planta (em cm). Com base nesta informação, é correto afirmar que a área total das folhas

(A) é de 10.000 $m^2$, quando as plantas tiverem altura de 100 cm.

(B) é máxima quando as plantas tiverem altura de 150 cm.

(C) é mínima quando as plantas tiverem altura de 100 cm.

(D) atinge um valor máximo de 135.000 $m^2$.

(E) se reduz quando as plantas crescem de 100 cm a 120 cm de altura.

**Solução: Alternativa B**

$A(100) = -3(100)^2 + 900.100 = 60000\ cm^2 = 6\ m^2$

Perceba que o coeficiente de $x^2$ em A(h) é negativo (vale – 3), fazendo com que A(h) admita um valor máximo. Este valor máximo de A(h) ocorre para h igual a:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{900}{2(-3)} = 150\ cm.$$

O valor máximo de A(h) vale:

$$A(h)_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{900^2 - 4(-3)(0)}{4(-1)} = 202500\ cm^2$$

Assim, a única alternativa correta é a letra B.

3) (UESPI-06) Um comerciante comprou a unidade de certo artigo por R$ 20,00, e calculou que se o comercializasse por x reais, cada, venderia por dia (60 – x) unidades desses artigos. Considerando $0 < x < 60$ e as condições apresentadas, podemos concluir que para maximizar o seu lucro, o comerciante terá que vender:

A) 20 artigos, cada um ao custo de R$ 40,00.
B) 25 artigos, cada um ao custo de R$ 20,00.
C) 30 artigos, cada um ao custo de R$ 30,00.
D) 35 artigos, cada um ao custo de R$ 35,00.
E) 40 artigos, cada um ao custo de R$ 30,00.

**Solução: Alternativa A**

Comprando por R$ 20,00 e vendendo por R$ x o lucro unitário é dado por R$ (x – 20).

Como o comerciante vendeu 60 – x unidades, o lucro total é dado por:

$L = (x - 20)(60 - x) = -x^2 + 80x - 1200$

Como o coeficiente de $x^2$ é negativo, tem-se que L assume um valor máximo. Este máximo ocorre para x igual a: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-1)} = 40$ reais

O número de artigos vendidos vale: $N = 60 - x = 60 - 40 = 20$.

A alternativa correta é a letra A.

## 8.5. EQUAÇÕES BIQUADRADAS

### 8.5.1. Definição

Toda equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, onde a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$, é denominada de equação biquadrada. Por exemplo, as equações de 4° grau $x^4 - 2x^2 + 3 = 0$, $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, $4x^4 - 49 = 0$ e $x^4 - 4x^2 = 0$ são exemplos de equações biquadradas. Apesar de ser uma equação de 4° grau, pode-se utilizar uma simples substituição algébrica para resolvê-la.

### 8.5.2. Resolução de uma equação biquadrada

No caso de uma equação incompleta da forma $ax^4 + bx^2 = 0$, $b \neq 0$, basta tirar em evidência $x^2$ e obter a equação $x^2(ax^2 + b) = 0$. Se a e b possuírem o mesmo sinal (ambos negativos ou ambos positivos) a única raiz real desta equação é 0, enquanto que se a e b possuírem sinais contrários as raízes reais são 0, $\sqrt{-\frac{b}{a}}$ e $-\sqrt{-\frac{b}{a}}$. No caso de uma equação incompleta da forma $ax^4 + c = 0$, se a e c possuírem o mesmo sinal não há raízes reais, enquanto que se a e c possuírem sinais opostos as raízes reais são $\sqrt[4]{-\frac{c}{a}}$ e $-\sqrt[4]{-\frac{c}{a}}$.

No caso da equação completa ($b \neq 0$ e $c \neq 0$), fazendo a substituição algébrica $x^2 = y$, obtém-se a equação de 2° grau $ay^2 + by + c = 0$, cujas raízes são $y_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $y_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, caso o discriminante da equação de 2° grau em y seja maior ou igual a zero.

Caso $y_1 \geq 0$ pode-se desfazer a substituição, ou seja, $x^2 = y_1$:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Do mesmo modo, se $y_2 \geq 0$, pode-se escrever que $x^2 = y_2$:

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \text{ ou } x_4 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Perceba que uma equação biquadrada somente possuirá as quatro raízes reais $x_1$, $x_2$, $x_3$ e $x_4$ caso $y_1$ e $y_2$ sejam reais e ambos maiores ou iguais a zero. Uma vez que não está definida, no campo dos números reais, a operação de extrair a raiz quadrada de um número real negativo, se $y_1$ ou $y_2$ (ou possivelmente ambos) não forem maiores ou iguais a zero, não será possível fazer desfazer a substituição $x^2 = y$ e assim a equação biquadrada pode ter somente duas raízes reais ou mesmo nenhuma raiz real.

Observe os quatro exemplos abaixo:

i) Na equação biquadrada $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$, ao ser feita a substituição $x^2 = y$ obtém-se a equação de 2° grau $y^2 - 6y + 8 = 0$, cujas raízes podem ser calculadas pela fórmula de Bhaskara:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow y_1 = 2 \text{ ou } y_2 = 4$$

Desfazendo a substituição:

- $x^2 = y_1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$ ou $x_2 = -\sqrt{2}$
- $x^2 = y_2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_3 = 2$ ou $x_4 = -2$

Portanto, pode-se afirmar que o conjunto solução da equação biquadrada $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ é $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 2\}$

ii) No caso da equação $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$, a substituição $x^2 = y$ leva até equação e 2° grau $y^2 - 6y + 9 = 0$. O discriminante desta equação de 2° grau é
$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$.

Assim, a única raiz de $y^2 - 6y + 9 = 0$ é $y = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$.

Desfazendo a substituição: $x^2 = y \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}$ ou $x_2 = \sqrt{3}$

Portanto, o conjunto solução de $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ é $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

iii) A substituição $x^2 = y$ na equação $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ produz a equação de 2° grau $y^2 + 2y - 3 = 0$, cujas raízes podem ser calculadas usando a fórmula de Bhaskara:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4.1.(-3)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow y_1 = -3 \text{ ou } y_2 = 1$$

Uma vez que $y_1 < 0$, somente pode-se desfazer a substituição de variáveis no caso $x^2 = y_2$: $x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ ou $x_2 = -1$

Deste modo, o conjunto solução da equação $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$, no campo dos números reais, é $S = \{-1, 1\}$

iv) Ao ser realizada a substituição $x^2 = y$ na equação biquadrada $x^4 - x^2 + 1 = 0$, obtém-se a equação $y^2 - y + 1 = 0$, cujo discriminante é negativo, uma vez que $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$. Como $\Delta < 0$, então pode-se afirmar que não existe y real de modo que a equação $y^2 - y + 1 = 0$ seja satisfeita. Logo, conclui-se que a equação biquadrada $x^4 - x^2 + 1 = 0$ também não possui raízes reais.

## Exercícios Resolvidos

**1)** (Colégio Naval-87) Uma equação biquadrada tem duas raízes respectivamente iguais a $\sqrt{2}$ e 3. O valor do coeficiente do termo de 2° grau dessa equação é:

a) 7 b) – 7 b) 11 d) – 11 e)1

**Solução: Alternativa D**

Considere que $\sqrt{2}$ e 3 são raízes de uma equação biquadrada da forma $x^4 + bx^2 + c = 0$. Fazendo a substituição $x = y^2$ tem-se que 2 e 9 serão raízes da equação de 2° grau $y^2 + by + c = 0$. Pela relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação de 2° grau: $b = -(2 + 9) = -11$

**2)** (Colégio Naval-92) O número de soluções inteiras da equação $4x^5 + 11x^3 - 3x = 0$ é:

a) 5 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

**Solução: Alternativa D**

Fatorando obtém-se $4x^5 + 11x^3 - 3x = x(4x^4 + 11x^2 - 3)$, ou seja, uma raiz é 0 e as outras saem da equação biquadrada $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$.

Fazendo a substituição $x = y^2$: $4y^2 + 11y - 3 = 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4(4)(-3)}}{8} = \frac{-11 \pm 13}{8} \Rightarrow y_1 = -3 \text{ ou } y_2 = 1/4$$

Uma vez que $y_1 < 0$, somente é possível desfazer a substituição no caso de $y_2$:

$x^2 = y \Rightarrow x^2 = 1/4 \Rightarrow x = 1/2$ ou $x = -1/2$

Deste modo, as soluções reais da equação $4x^5 + 11x^3 - 3x = 0$ são 0, 1/2 e – 1/2, sendo 0 a única inteira.

**3)** Determine as raízes reais da equação $x^8 - 10x^6 + 35x^4 - 50x^2 + 24 = 0$.

**Solução:**

$x^8 - 10x^6 + 35x^4 - 50x^2 + 24 = 0 \Rightarrow$

$(x^8 - 4x^6 + 3x^4) - (6x^6 - 24x^4 + 18x^2) + (8x^4 - 32x^2 + 24) = 0 \Rightarrow$

$x^4(x^4 - 4x^2 + 3) - 6x^2(x^4 - 4x^2 + 3) + 8(x^4 - 4x^2 + 3) = 0 \Rightarrow$

$(x^4 - 4x^2 + 3)(x^4 - 6x^2 + 8) = 0$

i) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 3 \Rightarrow$

$x^2 = 1$ ou $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$ ou $x = \pm\sqrt{3}$

i) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \xrightarrow{x^2 = z} z^2 - 6z + 8 = 0 \Rightarrow z = 2$ ou $z = 4 \Rightarrow$

$x^2 = 2$ ou $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ ou $x = \pm 2$

Logo, o conjunto solução é $S = \{\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm 2\}$.

## 8.6. EQUAÇÕES MODULARES

### 8.6.1. Módulo de um número real

Denomina-se módulo, ou valor absoluto, de um número real da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, pode-se entender módulo de um número real como sendo o número sem o seu sinal (quer seja positivo ou negativo). Em outras palavras, o módulo de um número real é igual ao número, caso este seja positivo, ou é igual ao oposto deste número, caso o número seja negativo. Assim, pode-se afirmar que: $|-8| = 8$, $|7| = 7$, $|-1000000| = 1000000$, $|0| = 0$, etc.

Outra maneira de definir o módulo de um número real é utilizando a notação de raiz quadrada, uma vez que a raiz quadrada de qualquer número real positivo é sempre positiva. Assim, pode-se escrever que $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Perceba que esta definição funciona perfeitamente para números positivos e negativos, pois:

$|-7| = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

$|13| = \sqrt{13^2} = \sqrt{169} = 13$

$|-1000| = \sqrt{(-1000)^2} = \sqrt{1000000} = 1000$

$|\pi| = \sqrt{\pi^2} = \pi$

### 8.6.2. Propriedades do módulo de um número real

i) $|x| = |-x|$

ii) $|x.y| = |x|.|y|$

iii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$

iv) $|x|^2 = |x^2|$

v) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

vi) $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

As demonstrações para estas propriedades, as cinco primeiras inclusive possuem demonstrações bem simples, ficam como exercício para o leitor. Cabe somente um comentário sobre a última propriedade, provavelmente a mais importante de todas as listadas acima, que é denominada de **desigualdade triangular** e possui uma aplicação muito importante na geometria plana, mais especificamente na determinação se três segmentos podem ou não formar um triângulo.

### 8.6.3. Equações modulares

Uma equação algébrica é denominada de equação modular se envolver o módulo de alguma expressão que contenha uma variável da equação. Assim, são equações modulares:

$$|x-3| = 8,\quad |x^2+2x+3| + |x-1| = 6,\quad |x+2| + \frac{1}{|x-1|} = 5,\quad |||x+3|+5|-2| = 4$$

A solução de uma equação modular é baseada analisando-se quando a expressão algébrica no interior do módulo é positiva ou negativa e, para cada caso, retirando-se as barras do módulo de acordo com a definição de módulo. Por exemplo, para que seja possível retirar as barras do módulo da expressão $|x-6|$, deve-se observar que $x-6 \geq 0$ quando $x \geq 6$ e que $x-6 < 0$ quando $x < 6$. Logo, pode-se afirmar que: $|x-6| = \begin{cases} x-6, & \text{se } x \geq 6 \\ -(x-6), & \text{se } x < 6 \end{cases}$.

Por exemplo, na solução da equação $|x-6| = 3$, deve-se separar a solução em dois casos, um para cada intervalo de x:

i) se $x \geq 6$: $x-6 = 3 \Rightarrow x = 9$

ii) se $x < 6$: $-(x-6) = 3 \Rightarrow x = 3$

Note que, em uma equação modular, sempre é necessário verificar se cada uma das soluções encontradas para a equação pertence ao intervalo que foi considerado no caso do cálculo de cada solução. No exemplo anterior, repara-se que $x = 9$ pertencem ao intervalo $x \geq 6$ e que $x = 3$ pertence ao intervalo $x < 6$. Assim, os dois números encontrados são realmente soluções do sistema.

Na equação $|x+1| - |x-2| = 3$ o primeiro passo é estudar o sinal das expressões algébricas no interior das barras dos módulos:

$|x+1| = x+1$ se $x \geq -1$ e $|x+1| = -(x+1)$ se $x < -1$.

$|x-2| = x-2$ se $x \geq 2$ e $|x-2| = -(x-2)$ se $x < 2$.

Assim, é necessário dividir a análise em três intervalos:

i) $x < -1$: nesse intervalo $x+1$ e $x-2$ são negativos

$-(x+1) - [-(x-2)] = 3 \Rightarrow -x-1+x-2 = 3 \Rightarrow -3 = 3$, que é uma contradição, ou seja, não há solução no intervalo $x < -1$.

ii) $-1 \leq x < 2$: nesse intervalo $x+1$ é positivo e $x-2$ é negativo

$x+1-[-(x-2)] = 3 \Rightarrow x+1+x-2 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$, que não é solução, uma vez que 2 não pertence ao intervalo $-1 \leq x < 2$.

i) $x \geq 2$: nesse intervalo $x+1$ e $x-2$ são positivos

$x+1-(x-2) = 3 \Rightarrow x+1-x+2 = 3 \Rightarrow 3 = 3$, que é uma identidade, ou seja, todo número real no intervalo $x \geq 2$ é solução da equação modular.

Logo, conclui-se que o conjunto solução da equação modular $|x+1| - |x-2| = 3$ é $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$.

## Exercícios Resolvidos

1) (EPCAr-99) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real dessa equação, pode-se afirmar que a

a) solução pertence ao intervalo fechado [ 1, 2 ].
b) solução pertence ao intervalo fechado [ -2, -1 ].
c) solução pertence ao intervalo aberto ] - 1, 1 [.
d) equação não tem solução.

**Solução: Alternativa D**

Pela definição de módulo: $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Logo:

i) $x \geq 0$: $x = x - 6 \Rightarrow 0 = -6$, que é uma contradição

Assim, no intervalo $[0, +\infty)$ não existe solução para a equação.

ii) $x < 0$: $-x = x - 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$, que está fora do intervalo $(-\infty, 0[$, ou seja, $x = 3$ não é solução da equação.

Deste modo, conclui-se que a equação apresentada não possui solução real.

2) (EsPCEx-00) Dada a equação $|2x - 3| + |x| - 5 = 0$, a soma de todas as suas soluções é igual a:

a) 3 b) $\frac{8}{3}$ c) 2 d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

**Solução: Alternativa C**

Inicialmente deve-se analisar os sinais das expressões algébricas que estão moduladas:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x \geq 3/2 \\ -(2x-3), & \text{se } x < 3/2 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Desta forma, é necessário separar a análise dos sinais dos módulos em três intervalos reais:

i) 1° caso: $x < 0$

Neste caso tem-se $|2x - 3| = -(2x - 3)$ e $|x| = -x$:

$$-(2x-3) - x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -2/3$$

Note que $x = -2/3$ é realmente raiz da equação, uma vez que pertence ao intervalo $x < 0$.

ii) 2° caso: $0 \leq x < 3/2$

Neste caso tem-se $|2x - 3| = -(2x - 3)$ e $|x| = x$:

$$-(2x-3) + x - 5 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Como $-2$ está fora do intervalo $0 \leq x < 3/2$, então $x = -2$ não é raiz da equação.

iii) 3° caso: $x \geq 3/2$

Neste caso tem-se $|2x - 3| = 2x - 3$ e $|x| = x$:

$$2x - 3 + x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = 8/3$$

Desde que $x = 8/3$ pertence ao intervalo $x \geq 3/2$, então $x = 8/3$ é raiz da equação.
Deste modo, o conjunto solução da equação $|2x - 3| + |x| - 5 = 0$ é $S = \{-2/3, 8/3\}$.
A soma destes valores é: $-2/3 + 8/3 = 2$.

3) (ITA-88) Sabendo-se que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que:
a) $a = 1$ e $b = 6$ b) $a = 0$ e $b = -6$
c) $a = 1$ e $b = -6$ d) $a = 0$ e $b = -9$
e) não existem a e b tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

**Solução: Alternativa D**

É necessário separar a solução em casos.
1° caso: $x \geq 0$, onde $|x| = x$:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ ou } x_2 = 3$$

Uma vez que, neste caso, x é maior ou igual a zero, o número $-2$ não á raiz da equação.
2° caso: $x < 0$, onde $|x| = -x$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_3 = -3 \text{ ou } x_4 = 2$$

Como neste caso só interessam os valores de x menores que zero, então 2 não é raiz da equação.
Portanto, o conjunto solução da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ é $S = \{3, -3\}$, que, segundo o enunciado, também é o conjunto solução de $x^2 - ax + b = 0$. Pela relação entre as raizes e os coeficientes de uma equação de 2° grau:
$a = x_2 + x_3 = 3 + (-3) = 0$
$b = x_2.x_3 = 3(-3) = -9$

4) (ITA-07) Sobre a equação na variável real x, $|||x - 1| - 3| - 2| = 0$, podemos afirmar que:
a) ela não admite solução real.
b) a soma de todas as suas soluções é 6.
c) ela admite apenas soluções positivas.
d) a soma de todas as soluções é 4
e) ela admite apenas duas soluções reais.

**Solução: Alternativa D**

$|||x - 1| - 3| - 2| = 0 \Leftrightarrow ||x - 1| - 3| = 2 \Leftrightarrow |x - 1| - 3 = 2$ ou $|x - 1| - 3 = -2 \Leftrightarrow$
$|x - 1| = 5$ ou $|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 5$ ou $x - 1 = -5$ ou $x - 1 = 1$ ou $x - 1 = -1 \Leftrightarrow$
$x = 6$ ou $x = -4$ ou $x = 2$ ou $x = 0$.
Logo, A soma de todas as soluções reais é 4.

**5)** (ITA-05) Determine todos os valores reais de a para os quais a equação $(x-1)^2 = |x-a|$ admita exatamente três soluções distintas.

**Solução:**

$(x-1)^2 = (x-a) \overset{(x-1)^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x - a = (x-1)^2$ ou $x - a = -(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 3x + a + 1 = 0$ ou $x^2 - x + 1 - a = 0$.

Para que haja exatamente três soluções distintas, deve ocorrer uma das seguintes possibilidades:

**I)** $x^2 - 3x + a + 1 = 0$, admite uma raiz dupla e
$x^2 - x + 1 - a = 0$, admite duas raízes distintas, diferentes da dupla anterior.

Assim: $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow 9 - 4(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ é raiz dupla da 1ª equação.

Para este valor de a, a 2ª equação fica $x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$, cujas raízes são $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

**II)** $x^2 - x + 1 - a = 0$, admite uma raiz dupla e
$x^2 - 3x + a + 1 = 0$, admite duas raízes distintas, diferentes da dupla anterior.

Daí: $\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ é raiz da dupla da 1ª equação. Para tal valor de a, a outra equação fica $x^2 - 3x + \frac{7}{4} = 0$, que possui as raízes $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

**III)** Ambas as equações possuem uma única raiz, $\alpha$, comum. Neste caso:

$$\alpha^2 - 3\alpha + a + 1 = \alpha^2 - \alpha + 1 - a \quad (=0) \Leftrightarrow \alpha = a.$$

Substituindo numa das equações:

$$a^2 - 3a + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Dessa forma, para que a equação $(x-1)^2 = |x-a|$ possua exatamente três raízes distintas, deve-se ter:

$$a = \frac{5}{4} \text{ ou } a = \frac{3}{4} \text{ ou } a = 1.$$

**6)** (ITA-11) O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a.

a) $-5$ b) $-1$ c) 1 d) 2 e) 5

**Solução: Alternativa A**

Análise da variação do sinal de $x^2 - 3x + 2$ e de $2x - 3$.

| $x^2-3x+2$ | 1 | $-(x^2-3x+2)$ | 2 | $x^2-3x+2$ |
|---|---|---|---|---|
| $-(2x-3)$ | $-(2x-3)$ | 3/2 | $2x-3$ | $2x-3$ |

1) se $x < 1$: $x^2 - 3x + 2 = -2x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ (ok) ou $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ (não serve, pois está fora do intervalo $x < 1$)

2) se $1 \le x < \frac{3}{2}$: $-x^2 + 3x - 2 = -2x + 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ (não serve, pois está fora do intervalo $1 \le x < \frac{3}{2}$) ou $x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ (ok)

3) se $\frac{3}{2} \le x < 2$: $-(x^2 - 3x + 2) = 2x - 3 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ok) ou $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (não serve, pois está fora do intervalo $\frac{3}{2} \le x < 2$)

4) se $x \ge 2$: $x^2 - 3x + 2 = 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ (ok) ou $x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ (não serve, pois está fora do intervalo $x \ge 2$)

Logo: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{4}{4}.\frac{20}{4} = -5$

## 8.7. EQUAÇÕES IRRACIONAIS

### 8.7.1. Definição

Uma equação é denominada de irracional quando envolve a radiciação de alguma expressão algébrica. Por exemplo, são irracionais as seguintes equações:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-8}=3,\ \sqrt[3]{x^2-1}+x=5,\ \sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x,\ \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2},\ \text{etc}$$

### 8.7.2. Resolução

Não há um método universal de resolução das equações irracionais. O que deve ser procurado é eliminar as radiciações envolvendo a variável da equação, de modo que seja determinada uma equação transformada cuja forma de resolver seja conhecida (equação de 2º grau, equação biquadrada, equação modular, etc). Na maioria dos casos, a eliminação das radiciações é realizada de duas maneiras:

1) Usando, quando for apropriado, as propriedades dos produtos notáveis, elevando-se os dois membros da equação por um mesmo número inteiro positivo. Em determinadas situações isto deve ser realizado mais de uma vez, até que todas as radiciações sejam eliminadas. Deve-se ter cuidado quando uma expressão algébrica é elevada a um expoente par, uma vez que raízes estranhas à equação original podem ser acrescidas na equação transformada. Por exemplo, para resolver a equação irracional $\sqrt{x+7}=x+1$ pode-se lançar mão de elevar os dois membros da equação ao quadrado:

$$\sqrt{x+7}=x+1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+7}\right)^2=(x+1)^2 \Rightarrow x+7=x^2+2x+1 \Rightarrow$$

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow x_1=-3 \text{ e } x_2=2$$

Substituindo na equação original, verifica-se que x = 2 realmente é raiz (obtém-se a identidade 3 = 3), entretanto, x = – 3 não é raiz, uma vez que $\sqrt{x+7}$ vale 2 para x = – 3, enquanto que x + 1 vale – 2 para x = – 3, que é uma clara contradição. Assim, a única solução real da equação irracional $\sqrt{x+7}=x+1$ é x = 2.

2) Fazendo uma substituição de variáveis de modo que seja possível eliminar todas as radiciações. A nova equação deve ser resolvida e, finalmente, deve-se desfazer a substituição de modo a encontrar as soluções da equação original. Neste caso também é necessário verificar se as raízes da equação transformada são raízes da equação original. Por exemplo, para resolver a na equação irracional $\sqrt[3]{x+2}-3\sqrt[6]{x+2}-4=0$, pode-se fazer a substituição de variáveis $x+2=y^6$:

$$\sqrt[3]{x+2} - 3\sqrt[6]{x+2} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{y^6} - 3\sqrt[6]{y^6} - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow y_1 = -1 \text{ ou } y_2 = 4$$

Desfazendo a substituição:

i) $x + 2 = y^6 \Rightarrow x_1 + 2 = (-1)^6 \Rightarrow x_1 = -3$

ii) $x + 2 = y^6 \Rightarrow x_2 + 2 = 4^6 \Rightarrow x_2 = 4094$

Verificando as raízes, observa-se que apenas $x = 4094$ é raiz da equação, pois quando substitui-se $x = -3$ em $\sqrt[6]{x+2}$, surge a raiz sexta de um número negativo, operação não definida nos números reais.

## Exercícios Resolvidos

**1)** (Colégio Naval-82) A equação $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$ tem duas raízes cuja soma é:

a) 10 b) 4 c) 8 d) 5 e) 6

**Solução: Alternativa D**

Neste caso, deve-se elevar ao quadrado duas vezes até que todas radiciações sumam.

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2x-1} \Rightarrow (\sqrt{3x+1})^2 = (1+\sqrt{2x-1})^2 \Rightarrow$$

$$3x + 1 = 1 + 2\sqrt{2x-1} + (\sqrt{2x-1})^2 \Rightarrow 3x = 2\sqrt{2x-1} + 2x - 1 \Rightarrow$$

$$x + 1 = 2\sqrt{2x-1} \Rightarrow (x+1)^2 = (2\sqrt{2x-1})^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4(2x-1) \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 8x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$x_1 = 1$ ou $x_2 = 5$

Substituindo na equação original, conclui-se que apenas $x = 5$ é raiz, pois quando substitui-se $x = 1$ na equação surgem raízes quadradas de números negativos. Note que há um erro no enunciado da questão, onde foi informado que a equação possui duas raízes. Na verdade, apenas $x = 5$ é raiz da equação.

**2)** (Colégio Naval-89) A solução da equação $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3x-1}} + \sqrt[3]{3x-1} = 4$, é

(A) divisor de 30 (B) múltiplo de 5 (C) fator de 40

(D) múltiplo de 7 (E) divisível por 9

**Solução: Alternativa A**

Pode-se resolver esta equação fazendo a seguinte substituição: $\sqrt[3]{3x-1} = y^3 - 2$.

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3x-1}} + \sqrt[3]{3x-1} = 4 \Rightarrow \sqrt{2 + y^3 - 2} + y^3 - 2 = 4 \Rightarrow y^3 + y - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow y_1 = -3 \text{ ou } y_2 = 2$$

Desfazendo a substituição:

i) $\sqrt[3]{3x-1} = y^2 - 2 \Rightarrow \sqrt[3]{3x_1 - 1} = (-3)^2 - 2 \Rightarrow \sqrt[3]{3x_1 - 1} = 7 \Rightarrow$

$3x_1 - 1 = 343 \Rightarrow x_1 = \frac{344}{3}$

ii) $\sqrt[3]{3x-1} = y^2 - 2 \Rightarrow \sqrt[3]{3x_2 - 1} = (2)^2 - 2 \Rightarrow \sqrt[3]{3x_2 - 1} = 2 \Rightarrow$

$3x_2 - 1 = 8 \Rightarrow x_2 = 3$

Dos dois valores encontrados, apenas x = 3 é raiz da equação, pois quando 344/3 é substituído na equação original, aparece a raiz a quadrada de um número negativo.

**3)** Resolva a equação $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9-x} = 3$.

**Solução:**

Para resolver esta equação deve-se elevar os dois membros da equação ao cubo, utilizando o produto notável $(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$:

$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9-x} = 3 \Rightarrow (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9-x})^3 = (3)^3 \Rightarrow$

$(\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{9-x})^3 + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{9-x}\underbrace{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9-x})}_{3} = 27 \Rightarrow$

$x + 9 - x + 9\sqrt[3]{x(9-x)} = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{x(9-x)} = 2 \Rightarrow 9x - x^2 = 8 \Rightarrow$

$x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ou } x_2 = 8$

Substituindo na equação, verifica-se que tanto 1 quanto 8 são raízes.

**4)** Resolva a equação, $\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}$, onde $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

**Solução:**

Inicialmente deve-se observar que x = 1 e x = – 1 não são raízes da equação.

Dividindo os dois membros da equação por $\sqrt[m]{(1-x)^2}$:

$$\frac{\sqrt[m]{(1+x)^2}}{\sqrt[m]{(1-x)^2}} - 1 = \frac{\sqrt[m]{(1-x)(1+x)}}{\sqrt[m]{(1-x)^2}} \Rightarrow \sqrt[m]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - 1 = \sqrt[m]{\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)^2}} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2 - 1 = \sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Fazendo a substituição $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} = y$ tem-se que:

$$y^2 - 1 = y \Rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Desfazendo a substituição: $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} = y \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = y^m \Rightarrow 1 + x = y^m - x.y^m \Rightarrow$

$$x.y^m + x = y^m - 1 \Rightarrow x(y^m + 1) = y^m - 1 \Rightarrow x = \frac{y^m - 1}{y^m + 1} \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^m - 1}{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^m + 1}$$

**5)** (ITA-05) Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx}$, sendo m um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro **m**.

b) Determine todos os valores de **m** para os quais a equação admite solução não nula.

**Solução:**

a) $\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx} \Rightarrow \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} = x$ (1)

Elevando ao quadrado:

$1 + mx - 2\sqrt{1-m^2x^2} + 1 - mx = x^2 \Rightarrow 2 - x^2 = 2\sqrt{1-m^2x^2}$ (2)

Elevando novamente ao quadrado:

$4 - 4x^2 + x^4 = 4 - 4m^2x^2 \Rightarrow x^2(x^2 + 4m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ou $x = 2\sqrt{1-m^2}$ ou $x = -2\sqrt{1-m^2}$ (3)

b) Observemos que $x = 0$ é sempre solução da equação, independentemente do valor de m. Vamos analisar os possíveis valores de m de modo que a equação possua outras soluções, além de $x = 0$.

De (3) temos que: $1 - m^2 > 0 \Rightarrow -1 < m < 1$ (4)

De (2) temos que $2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (5)

i) Analisemos inicialmente os possíveis valores de $m \geq 0$.

A partir da equação (1) podemos observar que para $m \geq 0$ poderemos ter x positivo ou negativo, uma vez que se $x > 0$ $(m \geq 0)$ temos $\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} > 0$ e se $x < 0$ $(m \geq 0)$ temos $\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} < 0$.

Se $x > 0$ temos $1 + mx > 0$. Entretanto, se $x < 0$ devemos analisar para que valores de m teremos $1 + mx \geq 0 \Rightarrow 1 - 2m\sqrt{1-m^2} \geq 0 \Rightarrow 2m\sqrt{1-m^2} \leq 1$.

Elevando ao quadrado (observe que os dois lados são > 0):

$4m^2(1 - m^2) \leq 1 \Rightarrow 4m^4 - 4m^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow (2m^2 - 1)^2 \geq 0$,

que é satisfeita para todo m real.

O caso em que $x > 0$ e $1 - mx \geq 0$ é idêntico.

De (1): $1 + mx \geq 0$ e $1 - mx \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq m \leq \frac{1}{x}$ (6)

Assim, de (5) e (6) temos que: $m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (7)

Consequentemente: (7) $\cap$ (4) $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le m < 1$

ii) Se $m < 0$, temos que a equação (1) não admite solução real, uma vez que se $x < 0$ teremos $\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} > 0$ e se $x > 0$ teremos $\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} < 0$.

Portanto, teremos solução, além de $x = 0$, para a equação se $\frac{\sqrt{2}}{2} \le m < 1$.

6) (ITA-07) Considere a equação:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?
b) Determine todas essas raízes reais.

**Solução:**

a) Análise inicial da equação $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$

(i) Como x é a soma de duas raízes quadradas, então $x \ge 0$.

(ii) $x^2 \ge p$

(iii) $x^2 \ge 1 \Rightarrow x \ge 1$ ou $x \le -1$ (não convém pois $x \ge 0$)

Para elevarmos ao quadrado os dois lados da equação $\sqrt{x^2 - p} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}$ devemos garantir que o lado direito é maior ou igual a zero:

(iv) $x - 2\sqrt{x^2 - 1} \ge 0 \Rightarrow x \ge 2\sqrt{x^2 - 1} \overset{x \ge 0}{\Rightarrow} x^2 \ge 4x^2 - 4 \Rightarrow x^2 \le \frac{4}{3}$

Elevando ao quadrado:

$x^2 - p = x^2 - 4x\sqrt{x^2 - 1} + 4x^2 - 4 \Rightarrow 4x\sqrt{x^2 - 1} = 4x^2 + (p - 4)$

Uma vez que $x \ge 0$ e $\sqrt{x^2 - 1} \ge 0$, então $4x\sqrt{x^2 - 1} \ge 0$.

Assim, temos que: (v) $4x^2 + (p - 4) \ge 0 \Rightarrow x^2 \ge \frac{4 - p}{4}$

Elevando ao quadrado mais uma vez:

$16x^2(x^2 - 1) = 16x^4 + 8x^2(p - 4) + (p - 4)^2 \Rightarrow 8(p - 2)x^2 = -(p - 4)^2 \Rightarrow$

$x^2 = \frac{(4 - p)^2}{8(2 - p)}$

De modo que o lado direito desta última igualdade seja maior ou igual a zero devemos ter:

(vi) $p - 2 < 0 \Rightarrow p < 2$ (1)

De acordo com as restrições encontradas ao longo da determinação de x temos que:

$\frac{4 - p}{4} \le x^2 \le \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4 - p}{4} \le \frac{(4 - p)^2}{8(2 - p)} \le \frac{4}{3}$

i) $\frac{4 - p}{4} \le \frac{(4 - p)^2}{8(2 - p)} \Rightarrow (4 - p) - \frac{(4 - p)^2}{2(2 - p)} \le 0 \Rightarrow$

$$\frac{(4-p)[2(2-p)-(4-p)]}{2(2-p)} \le 0 \Rightarrow \frac{p(4-p)}{(2-p)} \ge 0$$

Como $p < 2$ então $p(4-p) \ge 0$, ou seja, $0 \le p \le 4$ (2)

ii) $\frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \le \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{3(16-8p+p^2)-32(2-p)}{24(2-p)} \le 0 \Rightarrow \frac{3p^2+8p-16}{(2-p)} \le 0 \Rightarrow 3p^2 + 8p - 16 \le 0 \Rightarrow (3p-4)(p+4) \le 0 \Rightarrow p \le \frac{4}{3}$ ou $p \ge -4$ (3)

A interseção de (1), (2) e (3) é $0 \le p \le \frac{4}{3}$, que é o intervalo de valores de p no qual a equação admite raízes reais.

b) Desde que $x \ge 0$, $0 \le p \le \frac{4}{3}$ e $x^2 = \frac{(4-p)^2}{8(2-p)}$, então $x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$.

7) (IMO-59) Para quais valores de x temos

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = A, \text{ dado}$$

a) $A = \sqrt{2}$,

b) $A = 1$,

c) $A = 2$, onde somente números reais não negativos são permitidos nas raízes quadradas e os valores das raízes quadradas são apenas números positivos?

**Solução:**

Inicialmente deve-se observar que: $2x - 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1/2$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação:

$x+\sqrt{2x-1} + x-\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x^2-2x+1} = A^2 \Rightarrow 2x + 2|x-1| = A^2$

i) $A = \sqrt{2} \Rightarrow x + |x-1| = 1$

Se $1/2 \le x \le 1$: $x - x + 1 = 1$, que é uma identidade, ou seja, todo $x \in [1/2, 1]$ é raiz da equação.

Se $x > 1$: $x + x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1$, que é uma contradição por $x > 1$

ii) $A = 1 \Rightarrow 2x + 2|x-1| = 1$

Se $1/2 \le x \le 1$: $2x - 2x + 2 = 1 \Rightarrow$ contradição!!!

Se $x > 1$: $2x + 2x - 2 = 1 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = 3/4$, porém $x > 1$, ou seja, não existe solução para $A = 1$

iii) $A = 2 \Rightarrow x + |x-1| = 2$

Se $1/2 \le x \le 1$: $x - x + 1 = 2 \Rightarrow$ contradição!!!

Se $x > 1$: $x + x - 1 = 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 3/2$

## 8.8. SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

### 8.8.1. Definição

Um sistema de equações é chamado de não-linear se é possível identificar algum termo que não seja de 1º grau em uma variável, em pelo menos um das equações que compõe o sistema. Assim, são exemplos de sistemas de equações não-lineares:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+xz+yz=1 \\ xyz=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt{2y}=5 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{2}{3} \end{cases}, \text{ etc}$$

### 8.8.2. Resolução de um sistema de equações não-lineares

Analogamente ao caso das equações irracionais, não há fórmula para resolução de sistema não-linear. Deve-se observar, em cada caso, se um produto notável pode ser aplicado, se uma troca de variáveis pode simplificar as equações ou se é possível identificar uma fatoração nas expressões. Acompanhe os exemplos resolvidos abaixo de modo a entender melhor os métodos mais eficazes para se atacar um sistema não-linear.

## Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-85) No sistema $\begin{cases} x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=8 \\ (x^2-y^2)(x^2-2xy+y^2)=12 \end{cases}$, a soma dos valores de x e y é:

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{2}{3}$

**Solução: Alternativa C**

O membro esquerdo da 1ª equação é um produto notável:

$(x-y)^3=2^3 \Rightarrow x-y=2$ (1)

Observando dois produtos notáveis da 2ª equação, é possível reescrevê-la da seguinte forma:

$(x-y)(x+y)(x-y)^2=12 \Rightarrow (x+y)(x-y)^3=12$ (2)

Substituindo a equação 2 na equação 1: $(x+y).8=12 \Rightarrow x+y=\frac{3}{2}$.

Assim, temos o sistema linear: $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=\frac{3}{2} \end{cases}$

Somando as duas equações: $2x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$.

Substituindo na equação verifica-se que $\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ é realmente solução do sistema.

Logo: $x + y = 7/4 - 1/4 = 3/2$

**2)** (Colégio Naval-84) O maior valor de y, na solução do sistema: $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{y^3} = 5 \end{cases}$, é:

(A) 1 (B) 16 (C) 32 (D) 64 (E) 128

**Solução: Alternativa C**

Fazendo as substituições $x = a^4$ e $y = b^5$ o sistema fica da forma $\begin{cases} a + b = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$.

Da 1ª equação tem-se que $a = 3 - b$. Substituindo na 2ª equação:

$(3 - b)^2 + b^2 = 5 \Rightarrow 9 - 6b + b^2 + b^2 = 5 \Rightarrow b^2 - 3b + 2 = 0 \Rightarrow$

$(b - 1)(b - 2) = 0 \Rightarrow b = 1$ ou $b = 2$

Desfazendo a substituição: $y = b^5 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 32$

Desta forma, o maior valor de y é 32.

**3)** (Colégio Naval-90) Resolva, em IR, o sistema $\begin{cases} \sqrt{x}.y.z = \frac{8}{3} \\ x.\sqrt{y}.z = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x.y.\sqrt{z} = \frac{16\sqrt{2}}{27} \end{cases}$.

**Solução:**

Multiplicando, membro a membro, as três equações:

$(\sqrt{x}.y.z)(x.\sqrt{y}.z)(x.y.\sqrt{z}) = \frac{8}{3}.\frac{4\sqrt{2}}{3}.\frac{16\sqrt{2}}{27} \Rightarrow (x.y.z)^{5/2} = \frac{1024}{243} \Rightarrow$

$x.y.z = \frac{16}{9}$ (1)

Substituindo (1) na 1ª equação: $\sqrt{x}.\frac{16}{9.x} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

Substituindo (1) na 2ª equação: $\sqrt{y}.\frac{16}{9y} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow y = \frac{8}{9}$

Substituindo (1) na 3ª equação: $\sqrt{z}.\frac{16}{9z} = \frac{16\sqrt{2}}{27} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow z = \frac{9}{2}$

4) (IME-87) Determine as soluções reais do sistema:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 70 \\ (x+y)\cdot(x^2+y^2) = 203 \end{cases}$$

**Solução:**

Fatorando as equações:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 70 \\ (x+y)[(x+y)^2 - 2xy] = 203 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 70 \\ (x+y)^3 - 2xy(x+y) = 203 \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª:

$(x+y)^3 - 140 = 203 \Rightarrow (x+y)^3 = 343 \Rightarrow x + y = 7$ (1)

Substituindo na 1ª equação: $xy.7 = 70 \Rightarrow xy = 10$ (2)

Logo, $x(7-x) = 10 \Rightarrow 7x - x^2 = 10 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

$(x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 5$

Quando $x = 2$ tem-se $y = 5$ e quando $x = 5$ tem-se $y = 2$, ou seja, o conjunto solução é $S = \{(2, 5), (5, 2)\}$

5) (Colégio Naval-61) Resolver: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{16} \end{cases}$.

**Solução:**

$$\frac{5}{16} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{2}{xy} = \frac{9}{16} - \frac{2}{xy} \Rightarrow \frac{2}{xy} = \frac{4}{16} \Rightarrow xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{x}{8} = \frac{8 + x^2}{8x} \Rightarrow 8 + x^2 = 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$(x-2)(x-4) = 0$

i) $x = 2 \Rightarrow y = 4$; ii) $x = 4 \Rightarrow y = 2$

O conjunto solução é dado por $S = \{(2, 4), (4, 2)\}$

# Exercícios propostos

**Equações do 1º grau**

1) (ESSA-84) Resolvendo a proporção $\frac{x+3}{x+1} = \frac{3}{5}$ $(x \neq -1)$, obtemos:

(A) x = 0 (B) x = 4 (C) x = -6 (D) x = 2

2) (CM Brasília-03) Considerando a equação na incógnita x, $(m^2 - 1)x = m - 1$, sendo U = IR, a afirmativa correta é:

A ( ) x = m + 1

B ( ) $x = \frac{m}{m+1}$ para qualquer valor de m

C ( ) Se m = 1, então V = IR, onde V é o conjunto verdade da equação.

D ( ) Se m = −1 então V = IR

E ( ) Se m = 0 então V = ∅

3) (CM Brasília-07) A resolução da equação $3 + \frac{1}{2 + \frac{2}{x+1}} - \frac{1}{2} = 3$

A ( ) apresenta duas soluções.

B ( ) não apresenta solução.

C ( ) apresenta infinitas soluções.

D ( ) apresenta solução única s.

E ( ) apresenta solução igual a 1.

4) (CM Brasília-09) A primeira equação de que se tem notícia consta do papiro Rhind. Como os egípcios não utilizavam a linguagem das equações, o número desconhecido era sempre representado pela palavra "montão" e se calculava usando a ideia de proporção. O seguinte problema é um poema hindu do século VII (com adaptações)

"Um colar se rompeu quando brincavam um casal de irmãos Uma fileira de pérolas escapou e dessas pérolas:

- A sexta parte ao solo caiu
- A quinta parte na cama ficou
- Um terço pela jovem se salvou
- A décima parte o irmão recolheu
- E com dezoito pérolas o colar ficou"

Diga-me quantas pérolas tinha o colar?

A ( ) 90 pérolas B ( ) 92 pérolas C ( ) 91 pérolas
D ( ) 94 pérolas E ( ) 95 pérolas

5) (PUC/SP-08) Pouco se sabe sobre a vida de Diofanto da Alexandria, considerado o maior algebrista grego que, acredita-se, tenha vivido no período conhecido como o século da "Idade da Prata", de 250 a 350 d.C. O texto seguinte é uma transcrição adaptada do "Epitáfio de Diofanto", extraído do livro Matemática Divertida e Curiosa, de Malba Tahan, conhecido matemático brasileiro.
Eis o túmulo que encerra Diofanto — maravilha de contemplar! Com um artifício aritmético a pedra ensina a sua idade:
"Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; um duodécimo na adolescência; um sétimo, em seguida, foi passado num casamento estéril. Decorreu mais cinco anos, depois do que lhe nasceu um filho. Mas esse filho — desgraçado e, no entanto, bem amado! — apenas tinha atingido a metade do total de anos que viveu seu pai, quando morreu. Quatro anos ainda, mitigando a própria dor com o estudo da ciência dos números, passou-os Diofanto, antes de chegar ao termo de sua existência."
De acordo com as informações contidas no epitáfio, o número de anos vividos por Diofanto foi
a) 64 b) 72 c) 78 d) 82 e) 84

6) (UEMS-08) Um vendedor de frutas tinha uma determinada quantidade de melancias. Ao primeiro freguês, vendeu metade do que tinha e mais meia melancia; ao segundo, vendeu metade do que restou e mais meia melancia; ao terceiro freguês voltou a vender metade do que tinha mais meia melancia. Sabendo que o vendedor ficou sem melancias ao vender para estes três fregueses, quantas melancias o vendedor tinha no início?
a) 23 b) 22 c) 12 d) 11 e) 7

7) (UEPB-06) Se um pai atualmente tem 32 anos e o filho 5, o modelo matemático que nos fornecerá a solução da questão "A idade do pai será dez vezes maior que a do filho de hoje a quantos anos?" será:
a) $32 + x = 10(5 + x)$ b) $5 + x = 10(32 + x)$ c) $32 - x = 10(5 - x)$
d) $5 - x = 10(32 - x)$ e) $32 - x = 10(5 + x)$

8) (Colégio Naval-12) A solução real da equação $\frac{7}{x-1} - \frac{8}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$ é um divisor de
a) 12 b) 14 c) 15 d) 16 e) 19

9) (Unesp-09) Numa campanha de preservação do meio ambiente, uma prefeitura dá descontos na conta de água em troca de latas de alumínio e garrafas de plástico (PET)

arrecadadas. Para um quilograma de alumínio, o desconto é de R$2,90 na conta de água; para um quilograma de plástico, o abatimento é de R$0,17. Uma família obteve R$16,20 de desconto na conta de água com a troca de alumínio e garrafas plásticas. Se a quantidade (em quilogramas) de plástico que a família entregou foi o dobro da quantidade de alumínio, a quantidade de plástico, em quilogramas, que essa família entregou na campanha foi

A) 5. B) 6. C) 8. D) 9. E) 10.

**10)** (Unifei-08) Um pai tem, hoje, 50 anos e os seus três filhos têm 5, 7 e 10 anos, respectivamente. Daqui a quantos anos a soma das idades dos três filhos será igual à idade do pai?

**11)** (Epcar-17) João, ao perceber que seu carro apresentara um defeito, optou por alugar um veículo para cumprir seus compromissos de trabalho. A locadora, então, lhe apresentou duas propostas:

• plano A, no qual é cobrado um valor fixo de R$ 50.00 e mais R$ 1,60 por quilômetro rodado.

• plano B, no qual é cobrado um valor fixo de R$ 64,00 mais R$ 1,20 por quilômetro rodado.

João observou que, para um certo deslocamento que totalizava k quilômetros, era indiferente optar pelo plano A ou pelo plano B, pois o valor final a ser pago seria o mesmo. É correto afirmar que k é um número racional entre

a) 14,5 e 20 b) 20 e 25,5 c) 25,5 e 31 d) 31 e 36,5

**12)** (Colégio Naval-97) Três pessoas resolveram percorrer um trajeto da seguinte maneira: a primeira andaria a metade do percurso mais **1 km**, a segunda a metade do que falta mais **2 km** e finalmente a terceira que andaria a metade do que resta a mais **3 km**. O número de quilômetro desse trajeto é:

a) menor que 20. b) maior que 19 e menor que 25.

c) maior que 24 e menor que 30. d) maior que 29 e menor que 35.

e) maior que 34.

**13)** (Colégio Naval-00) Um fazendeiro repartiu seu rebanho de 240 cabeças de boi entre seus três filhos da seguinte forma: o primeiro recebeu 2/3 do segundo, e o terceiro tanto quanto o primeiro mais o segundo. Qual o número de cabeças de boi que o primeiro recebeu?

(A) 12 (B) 30 (C) 36 (D) 48 (E) 54

**14)** (Colégio Naval-01) Dividindo-se o cubo de um número pelos $\frac{2}{3}$ do seu quadrado, acha-se 18 para o quociente. A raiz quadrada da terça parte desse número é:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

15) (Colégio Naval-02) O conjunto solução da equação $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}} = 1$ é igual a:

a) ∅ b) R c) R – {-1, 0, 1} d) R – {-1, 1} e) {0}

16) (Colégio Naval-02) Quatro corredores, João, Pedro, André e Fábio combinaram que, ao final de cada corrida, o que ficasse em último lugar dobraria o dinheiro que cada um dos outros possuía. Competiram 4 vezes e ficaram em último lugar na 1ª, 2ª, 3ª e 4ª corridas, respectivamente, João, Pedro, André e Fábio. Se no final da 4ª competição, cada um ficou com R$ 16,00, então, inicialmente João possuía:

a) R$ 5,00 b) R$ 9,00 c) R$ 16,00 d) R$ 17,00 e) R$ 33,00

17) (EPCAr-01) Uma aeronave voou no primeiro dia de uma viagem $\frac{3}{5}$ do percurso. No segundo dia, voou $\frac{2}{3}$ do que faltava e, no 3º dia, completou a viagem voando 800 km. O percurso total, em km, é um número

a) divisor de $12.10^3$ b) múltiplo de $10^4$

c) divisor de $10^3$ d) múltiplo de $20.10^3$

18) (EPCAr-05) Com base na igualdade $\dfrac{5x-3}{2}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{2x}{3}=\dfrac{19x-8}{6}-\dfrac{1}{2}$, pode-se afirmar que

a) tem apenas uma solução e esta solução é um número par.

b) tem apenas uma solução e esta solução é um número ímpar.

c) tem uma infinidade de soluções.

d) não tem nenhuma solução.

19) (Epcar-13) Hoje, dia 29 de julho de 2012, José tem o dobro da idade que Luiz tinha quando José tinha a idade que Luiz tem. Quando Luiz tiver a idade que José tem, a soma das idades deles será 90 anos. Em 29 de julho de 2017, a razão entre as idades de José e Luiz, nessa ordem, será

a) 6/5 b) 9/7 c) 5/4 d) 27/20

20) (Colégio Naval-20) Uma jovem lê todos os dias, pela manhã, à tarde ou à noite, mas como é atarefada nunca consegue ler por três turnos consecutivos. Como é muito dedicada, também cuida para nunca ficar três turnos consecutivos sem sua leitura habitual. Seguindo essas regras, ela observou que o último livro que terminou foi lido de tal forma que:

- Foram necessários 28 turnos de leitura para finalizar esse livro;
- Em 12 manhãs, 7 tardes e 10 noites ela não leu qualquer parte desse livro.

Com base somente nesses dados, quantos dias essa jovem gastou com a leitura desse livro?

a) 19 b) 17 c) 15 d) 13 e) 11

**20)** (Olimpíada de Campina Grande-04) Se uma melancia pesa 9/10 do seu peso mais 9/5 de meio quilo, quantos quilos ela pesa?

**21)** (OBM-98) Um pai tem 33 anos e seu filho, 7 anos. Depois de quantos anos a idade do pai será o triplo da idade do filho?

A) 3 B) 7 C) 6 D) 9 E) 13

**22)** (OBM-02) Toda a produção mensal de latas de refrigerante de uma certa fábrica foi vendida a três lojas. Para a loja A, foi vendida metade da produção; para a loja B, foram vendidos $\frac{2}{5}$ da produção e para a loja C, foram vendidas 2500 unidades. Qual foi a produção mensal dessa fábrica?

A) 4166 latas B) 10000 latas C) 20000 latas
D) 25000 latas E) 30000 latas

**23)** (Olimpíada de Campina Grande-04) Se uma melancia pesa 9/10 do seu peso mais 9/5 de meio quilo, quantos quilos ela pesa?

**24)** A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?

**25)** Uma casa contendo $260m^2$ de área construída possui 3 dormitórios de mesmo tamanho. Qual é a área de cada dormitório se as outras dependências da casa ocupam $140m^2$?

**26)** Há 8 anos, a idade da Inês era metade da sua idade atual. Que idade tem a Inês?

**27)** Determinar três números inteiros consecutivos de modo que a soma do dobro do primeiro com o triplo do segundo seja igual ao quádruplo do terceiro.

**28)** (Olimpíada Bay Area-20) Determine todos os números reais x que satisfazem a equação $\frac{x-2020}{1}+\frac{x-2019}{2}+\ldots+\frac{x-2000}{21}=\frac{x-1}{2020}+\frac{x-2}{2019}+\ldots+\frac{x-21}{2000}$.

**Sistemas de equações do 1º grau**

1) (CM Brasília-05) Um burro disse a um jumento: " – Se eu te passar um dos sacos de farinha que carrego, ficaremos com cargas iguais; mas, se você passar um dos sacos que carrega, minha carga ficará sendo o dobro da sua". Se a quantidade de sacos carregados pelo burro é X e pelo jumento é Y, então X + Y é igual a
A ( ) 3. B ( ) 8. C ( ) 11. D ( ) 12. E ( ) 13.

2) (CM Fortaleza-14) Em uma bolsa existem peças em formatos de triângulos, quadrados e pentágonos, nas quantidades de x triângulos, y quadrados e z pentágonos. Sabendo-se que a soma das quantidades de peças é igual a 10; que, se somarmos as quantidades de vértices de todas as peças, obtemos 37; e que a quantidade de triângulos é igual à soma das quantidades de quadrados e pentágonos, o valor de 2x + 3y + z é igual a:
a) 21 b) 19 c) 15 d) 10 e) 8

3) (CM Brasília-07) Três amigos foram a uma loja de doces. Luís gastou R$ 2,90 e comprou um caramelo e dois pirulitos. Maria gastou R$ 4,30 e comprou um caramelo e dois chocolates. Quanto gastou Júlio se comprou um caramelo, um pirulito e um chocolate?
A ( ) R$3,30. B ( ) R$3,60. C ( ) R$3,80.
D ( ) R$3,90. E ( ) R$4,00.

4) (CM Brasília-08) Uma criança ganhou de seu pai R$75,00, num total de 12 notas. Se o pai só deu a ela notas de R$5,00 e R$10,00, o produto do número de notas de R$5,00 pelo número de notas de R$10,00 é igual a:
A ( ) 20 B ( ) 27 C ( ) 32 D ( ) 35 E ( ) 36

5) (CM Salvador-07) Na cantina do colégio, Arnaldo pagou R$ 1,50 por um pastel e um bombom; Bernaldo pagou R$ 1,90 por um pastel e um refrigerante; e Cernaldo pagou R$ 2,00 por um bombom e um refrigerante. Se Dervaldo comprou um refrigerante, um bombom e um pastel, ele gastou:
(A) R$ 2,50 (B) R$ 2,60 (C) R$ 2,70
(D) R$ 2,80 (E) R$ 2,90

6) (CM Santa Maria-05) Ranna e Lara são primas que estudam no Colégio Militar de Santa Maria. Hoje, a idade de Ranna representa 60% da idade de Lara, mas daqui a 11 anos, o dobro da idade de Ranna será igual à idade de Lara mais 13 anos. Podemos afirmar que a soma das idades de Ranna e Lara daqui a 5 anos será:
a. ( ) 29 b. ( ) 32 c. ( ) 34 d. ( ) 40 e. ( ) 26

7) (Colégio Naval-16) Dado o sistema $S: \begin{cases} 2x - ay = 6 \\ -3x + 2y = c \end{cases}$ nas variáveis x e y, pode-se afirmar que

a) existe $a \in \left]\frac{6}{5}, 2\right[$ tal que o sistema S não admite solução para qualquer número real c.

b) existe $a \in \left]\frac{13}{10}, \frac{3}{2}\right[$ tal que o sistema S não admite solução para qualquer número real c.

c) se $a = \frac{4}{3}$ e $c = -9$, o sistema S não admite solução.

d) se $a \neq \frac{4}{3}$ e $c = -9$, o sistema S admite infinitas soluções.

e) se $a = \frac{4}{3}$ e $c = -9$, o sistema S admite infinitas soluções.

8) (Fuvest-07) Se Amélia der R$3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

9) (Fuvest-08) João entrou na lanchonete BOG e pediu 3 hambúrgueres, 1 suco de laranja e 2 cocadas, gastando R$21,50. Na mesa ao lado, algumas pessoas pediram 8 hambúrgueres, 3 sucos de laranja e 5 cocadas, gastando R$57,00. Sabendo-se que o preço de um hambúrguer, mais o de um suco de laranja, mais o de uma cocada totaliza R$10,00, calcule o preço de cada um desses itens.

10) (FGV-08) Dona Maria foi à feira e comprou 3kg de tomate e 2kg de cebola, gastando um total de $11,50. Na semana seguinte observou que o preço do tomate aumentou 20%, e o da cebola diminuiu 20%. Ainda assim, comprou novamente 3kg de tomate e 2kg de cebola, gastando agora um total de $12,20. Então, o preço de 1kg de tomate, após o aumento, passou a ser:
A) $2,40 B) $2,00 C) $3,00 D) $3,60 E) $1,80

11) (FGV-08) Como se sabe, no jogo de basquete, cada arremesso convertido de dentro do garrafão vale 2 pontos e, de fora do garrafão, vale 3 pontos. Um time combinou com seu clube que receberia $50,00 para cada arremesso convertido de 3 pontos e $30,00 para cada arremesso convertido de 2 pontos. Ao final do jogo, o time

fez 113 pontos e recebeu $1.760,00. Então, a quantidade de arremessos convertidos de 3 pontos foi:
a) 13 b) 15 c) 16 d) 17 e) 18

12) (FGV-08) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + y = -13 \\ x + y = k \end{cases}$$

de incógnitas x e y e parâmetro k. Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter:
a) $k = -7$ b) $k \neq -7$ c) k é um número real qualquer.
d) $k > -3$ e) O sistema nunca será possível e indeterminado.

13) (Unicamp-20) Em uma família, cada filha tem o mesmo número de irmãs e irmãos, e cada filho tem um número de irmãs igual ao dobro do número de irmãos. O número total de filhos e filhas dessa família é igual a
a) 11. b) 9. c) 7. d) 5.

14) (Epcar-19) Considere quatro números naturais distintos tais que, quando adicionados três a três, resultem em: 152, 163, 175 e 185. Sobre esses quatro números é correto afirmar que
a) todos são números menores que 70
b) nenhum é múltiplo de 10
c) apenas um é número primo.
d) algum é quadrado perfeito.

15) (Colégio Naval-82) Sobre o sistema: $\begin{cases} a^2x + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$ podemos afirmar:
a) para a = 1, o sistema é indeterminado
b) para a = -1, o sistema é determinado
c) para $a \neq -1$, o sistema é impossível
d) para a = 0, x = y = 2
e) para a = -1, x = y = 3

16) (Colégio Naval-86) O sistema $\begin{cases} mx - 5y = 3 \\ 3x + ky = 4 \end{cases}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$
logo, pode-se afirmar que
(A) m – k = -8 (B) $k^m = -1$ (C) $m^k = 1/7$
(D) m . k = 7/2 (E) m + k = 8

**17)** (Colégio Naval-88) Num sistema S de duas equações do 1° grau com duas incógnitas, x e y, os coeficientes de x e de y de uma das equações são, respectivamente, proporcionais aos coeficientes de x e de y da outra. Logo, o conjunto solução de S.

(A) é unitário (B) é infinito (C) é vazio
(D) pode ser vazio (E) pode ser unitário

**18)** (Colégio Naval-89) Dado o sistema $\begin{cases} mx + ny = 2m + 3n \\ px + qy = 2p + 3q \end{cases}$ onde m.n.p.q $\neq 0$,

(A) se $mq - np = 0$, então o sistema pode ser impossível.
(B) se $mq - np = 0$, então o sistema não é indeterminado.
(C) se $mq - np \neq 0$, então o sistema não é determinado.
(D) o sistema não é impossível.
(E) se $mq - np \neq 0$, então o sistema é impossível.

**19)** (Colégio Naval-92) Um sistema de três equações do 1° grau com duas incógnitas é determinado. Logo um sistema formado por apenas duas destas equações.

a) é determinado
b) é indeterminado
c) é impossível
d) pode ser impossível ou determinado
e) pode ser indeterminado ou determinado.

**20)** (Colégio Naval-94) Para que valores de k e p o sistema $\begin{cases} kx - 6y = 5k - 3p \\ (k-4)x + 2y = 4k + 3 \end{cases}$

é indeterminado?

a) k = 20 e p = 3 b) k = 10 e p = 6 c) k = 10 e p = 3
d) k = 3 e p = 20 e) k = 3 e p = 10

**21)** (Colégio Naval-96) Num depósito, estão guardadas 300 folhas de compensado de espessura 5,0 mm e 1,5 cm, respectivamente, formando uma pilha com 2,35 m de altura. Qual a soma dos algarismos do número que expressa a quantidade de folhas de 5,0 mm?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

**22)** (Colégio Naval-98) Um baleiro vende dois tipos de balas: $b_1$ e $b_2$. Três balas do tipo $b_1$ custam R$ 0,10 e a unidade de bala $b_2$ custa R$ 0,15. No final de um dia de trabalho, ele vendeu 127 balas e arrecadou R$ 5,75. O número de balas do tipo $b_1$ vendidas foi:

(A) 114 (B) 113 (C) 112 (D) 11 (E) 110

23) (Colégio Naval-97) Considere o sistema linear S, de incógnitas x e y: $S = \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$. Se os pares ordenados (x, y) = (3, -5) e (x, y) = (2, - 3) são soluções de S, então:

a) (-3, 7) também é solução de S.
b) (3, -7) também é solução de S.
c) S só tem as duas soluções apresentadas.
d) S só tem mais uma solução além das apresentadas.
e) Qualquer par ordenado de números reais é solução de S.

24) (Colégio Naval-99) Um grupo de alunos faz prova numa sala. Se saírem do recinto 10 rapazes, o número de rapazes e moças será igual. Se, em seguida, saírem 10 moças o número de rapazes se tornará o dobro do número de moças. Sendo r o número de rapazes e m o número de moças podemos afirmar que 2r+m é igual a:
(A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90 (E) 110

25) (Colégio Naval-99)

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$$

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando toda solução de um é solução do outro e vice-versa. Qual é a soma dos valores de $a$ e $b$, tais que os sistemas acima sejam equivalentes?
(A) 1 (B) 2 (C) –1 (D) –2 (E) zero

26) (Colégio Naval-04) Analise as seguintes afirmativas sobre um sistema S de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas x e y.
I – S sempre terá ao menos uma solução, se os seus termos independentes são iguais a zero.
II – Se a razão entre os coeficientes de x for igual a dos de y, S terá infinitas soluções.
III – Se a razão entre os coeficientes de x for diferente da dos de y, S terá apenas uma solução.
Assinale a alternativa correta.
a) A penas a afirmativa I é verdadeira.
b) A penas a afirmativa II é verdadeira.
c) A penas a afirmativa III é verdadeira.
d) A penas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

27) (Colégio Naval-04) O conjunto dos trinta talheres de uma certa casa é constituído de garfos, facas e colheres, de aço inoxidável e aço comum. Sabe-se que.
- existem cinco facas, seis garfos e sete colheres, todos de aço comum.

- o número total de garfos é o dobro do número de facas de aço inoxidável.
- o número de facas de aço inoxidável excede o número de colheres desse mesmo tipo de aço em duas unidades.
Quantas colheres tem esse conjunto de talheres?
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

**28)** (Colégio Naval-07) Observe o sistema de equações lineares abaixo.

$$S_1: \begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 12 \\ 2x + 7y = 4 \end{cases}$$

Sendo $(x_1, y_1)$ solução de $S_1$, o resultado de $(6 + \sqrt{2})x_1 + (21 + \sqrt{3})y_1$ é igual a:
a) 18 b) 21 c) 24 d) 28 e) 32

**29)** (Colégio Naval-09) Sabendo-se que $2x + 2y = 12$ e que $mx + 4y = 16$ são equações sempre compatíveis, com x e y reais, quantos são os valores de m que satisfazem essas condições?
a) um b) dois c) três d) quatro e) infinitos.

**30)** (Colégio Naval-10) Sobre o sistema formado por $3x + 4y = 7$ e $6x + 8x = 15$ pode-se afirmar que é
a) indeterminado
b) determinado e $9x + 12y = 22$.
c) determinado e $x = y = 0$.
d) determinado e $x = -y \neq 0$.
e) impossível.

**31)** (EsPCEx-02) No Brasil, três turistas trocaram por reais, no mesmo dia e pelas mesmas cotações, as quantias que possuíam em dólares, libras e euros, da seguinte forma:
**Turista A:** 10 dólares, 20 libras e 15 euros por 122 reais;
**Turista B:** 15 dólares, 10 libras e 20 euros por 114 reais;
**Turista C:** 20 dólares, 10 libras e 10 euros por 108 reais.
O valor em reais recebido por uma libra foi.
a) 2,60 b) 2,80 c) 3,00 d) 3,20 e) 3,40

**32)** (EsPCEx-07) Em uma bolsa existem peças em formatos de triângulos, quadrados e pentágonos, nas quantidades de x triângulos, y quadrados e z pentágonos. Sabendo-se que a soma das quantidades de peças é igual a 10; que, se somarmos as quantidades de vértices de todas as peças, obtemos 37; e que a quantidade de triângulos é igual à soma das quantidades de quadrados e pentágonos, o valor de $2x + 3y + z$ é igual a:
a) 21 b) 19 c) 15 d) 10 e) 8

**33)** (Olimpíada de Campina Grande-01) Se $a,b,c,d$ são inteiros tais que:

$$\begin{cases} 2a + 3b + 5c = -31 \\ 3b + 2a + 7d = 34 \\ 2a + 7d + 5c = 29 \\ 3b + 5c + 7d = 10 \end{cases}$$

então o valor de $(2a + 3b + 5c + 7d)$ é igual a:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

**34)** (Olimpíada do Ceará-84) Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \ldots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0 \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Prove que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{99} = x_{100} = 0$.

**35)** (Olimpíada de Campina Grande-02) A relação entre a, b, c para que o sistema abaixo de incógnitas x, y, z tenha solução é:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$$

A) $2a - b + c = 0$
B) $2a + b - c = 0$
C) $2a - b - c = 0$
D) Quaisquer valores para a, b, c produzem uma solução
E) Impossível obter uma relação

**36)** (Olimpíada do Rio de Janeiro-16) A professora de Joãozinho escreveu no quadro um sistema de equações. Joãozinho, quando copiou do quadro o sistema, escreveu errado um, e somente um, coeficiente do sistema. Esse foi o sistema que Joãozinho escreveu em seu caderno:

$x + y + 2z = 6$
$3x + 2y + z = 7$
$4x + 2y + 3z = 12$

Sabendo que o sistema original tem todos os coeficientes inteiros e sua solução é (5/11, 21/11, 20/11), encontre o sistema original.

37) (Olimpiada do Rio de Janeiro-15) Num grupo de 3 amigos, Arnaldo, Bernardo e Carlos, sabe-se que Arnaldo tem 3 anos a mais do que a média das idades dos 3 amigos, enquanto Bernardo tem 1 ano a menos que a média. Se Carlos tem a metade da idade de Arnaldo, quais as idades de Arnaldo, Bernardo e Carlos?

38) (OBM-16) Numa maratona com 2016 participantes, o número de corredores que chegaram antes de Josias foi igual a um quarto do número de corredores que chegaram depois de Josias. Em que lugar chegou Josias?
A) 404° B) 405° C) 407° D) 1007° E) 1008°

39) (OBM-00) Há 18 anos Hélio tinha precisamente três vezes a idade de seu filho. Agora tem o dobro da idade desse filho. Quantos anos têm Hélio e seu filho?
A) 72 anos e 36 anos. B) 36 anos e 18 anos. C) 40 anos e 20 anos.
D) 50 anos e 25 anos. E) 38 anos e 19 anos.

40) (ITA-90) Há muito tempo atrás, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a ideia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma ideia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada marinheiro a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos.
Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de 29/17 então o número de moedas que havia originalmente no baú era:
a) 99 b) 95 c) 135 d) 87 e) n.d.a

**Equações do 2º grau**

1) (CM Brasília-03) A equação $x^2 + px + q = 0$, $p$ e $q \in \mathbb{R}$, tem raízes reais opostas e não nulas. Podemos então afirmar que:

A ( ) $p \neq 0$ e $q \neq 0$ B ( ) $p > 0$ e $q = 0$ C ( ) $p < 0$ e $q > 0$

D ( ) $p = 0$ e $q > 0$ E ( ) $p = 0$ e $q < 0$

2) (CM Brasília-03) Se as raízes da equação $x^2 + bx + 12 = 0$ são cada uma, 7 unidades maiores que as raízes de $x^2 + Bx + 12 = 0$, então:

A ( ) $B = -5$ B ( ) $B = 5$ C ( ) $B = -7$ D ( ) $B = 7$

E ( ) Faltam dados para determinar B.

3) (CM BH-13) Seja $ax^2 + bx + c = 0$ uma equação do 2º grau com coeficientes a, b e c reais. Sejam $x_1$ e $x_2$ as raízes dessa equação, tais que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. O valor da razão $\frac{c}{b}$ é dado por:

a) $4\sqrt{3}+7$ b) $-11\sqrt{3}$ c) $-4\sqrt{3}-7$ d) $-4\sqrt{3}+7$ e) $4\sqrt{3}-7$

4) (Colégio Naval-15) Considere a equação do 2º grau $2014x^2 - 2015x - 4029 = 0$. Sabendo-se que a raiz não inteira é dada por $\frac{a}{b}$, onde "a" e "b" são primos entre si, a soma dos algarismos de "a + b" é:

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

5) (CM Brasília-16) WhatsApp Messenger é um aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamada de voz para smartphones. Além de mensagens de texto, usuários podem enviar imagens, vídeos e documentos em PDF, além de fazer ligações grátis por meio de uma conexão com a internet.

Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/WhatsApp Acesso em 04/09/2016

Bruno enviou uma mensagem pelo WhatsApp para um amigo que é professor de matemática, solicitando a resposta correta para o seguinte problema:

"Considere a equação $x^2 - 2016x - 2016 = 0$, cujas raízes denotamos por u e v. Sabendo que $u^{2014} + v^{2014} = a$ e $u^{2015} + v^{2015} = b$, determine o valor de $u^{2016} + v^{2016}$ em função de a e b".

O professor respondeu a Bruno informando que a resposta correta era igual a

a) $2016(a + b)$ b) $2016(a - b)$ c) $2015(a - b)$

d) $2014(a + b)$ e) $2014(a - b)$

6) (CM Brasília-07) A soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 + 4x + m = 0$ é 40. A soma dos inversos das raízes é igual a
a) 1/3 b) 2/3 c) 1/2 d) 1/4 e) 1/5

7) (CM RJ-05) Uma das raízes da equação $ax^2 + bx - 3 = 0$ é -1. Sabendo que os coeficientes a e b são números positivos e primos, podemos afirmar que $a^2 + b^2$ é igual a:
A) 3. B) 6. C) 11. D) 15. E) 29.

8) (CM RJ-08) Sejam $f(x) = x^2 + bx + 9$ e $g(x) = x^2 + dx + e$. Se $f(x) = 0$ possui raízes r e s, e $g(x) = 0$ possui raízes $-r$ e $-s$, então, a soma dos coeficientes da expressão da função $h(x) = f(x) + g(x)$ é igual a:
A) 9 B) 18 C) 20 D) 30 E) 36

9) (CM Salvador-07) A soma dos cubos das raízes da equação $x^2 - 3x + 7 = 0$ é:
(A) – 12 (B) – 27 (C) – 36 (D) – 42 (E) – 63

10) (Epcar-18) Considere a equação ( I ) na incógnita x e a equação ( II ) na incógnita y, a seguir:
( I ) $\frac{x}{m-n} - \frac{5m}{m+n} = \frac{2nx}{m^2-n^2}$, com $m^2 \neq n^2$
( II ) $2y^2 + xy + 8 = 0$
O valor de x da equação ( I ) é substituído na equação ( II ). Se a equação ( II ), após esta substituição, possui conjunto solução distinto do conjunto vazio, então o conjunto mais amplo dos valores de m que atendem esta condição é
a) $\left\{m \in IR / m \leq -\frac{8}{5} \text{ ou } m \geq \frac{8}{5}\right\}$ b) $\left\{m \in IR / \frac{8}{5} \leq m \leq -\frac{8}{5}\right\}$
c) $\left\{m \in IR / m \geq \frac{8}{5}\right\}$ d) $\left\{m \in IR / m = \pm\frac{8}{5}\right\}$

11) (UEG-10) Fui a uma loja de materiais de construção para comprar certa quantidade de cimento. O vendedor me disse que o valor total que eu deveria pagar pela compra era 390 reais. Achei caro, pedi desconto, fui atendido, tive desconto de 2 reais em cada saco de cimento que estava comprando. Com o total do desconto que me foi concedido, consegui comprar quatro sacos de cimento a mais do que a quantidade pedida no orçamento original. Assim, quantos sacos de cimento comprei?

12) (Unesp-08) Um grupo de x estudantes se juntou para comprar um computador portátil (notebook) que custa R$3.250,00. Alguns dias depois, mais três pessoas se juntaram ao grupo, formando um novo grupo com x + 3 pessoas. Ao fazer a divisão do valor do computador pelo número de pessoas que estão compondo o novo grupo,

verificou-se que cada pessoa pagaria R$75,00 a menos do que o inicialmente programado para cada um no primeiro grupo. O número x de pessoas que formavam o primeiro grupo é:
A) 9. B) 10. C) 11. D) 12. E) 13.

**13)** (Unicamp-20) Sabendo que a é um número real, considere a equação quadrática $2x^2 + ax + 10 = 0$. Se as soluções dessa equação são números inteiros, o módulo da soma das soluções é igual a
a) 3. b) 4. c) 5. d) 6.

**14)** (Fuvest-05) Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R$96,00, e unidades do produto B, pagando R$84,00. Sabendo-se que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em R$2,00 o preço unitário do produto B, determine o número de unidades de A que foi comprado.

**15)** (Fuvest-08) A soma dos valores de m para os quais x = 1 é raiz da equação $x^2 + (1 + 5m - 3m^2)x + (m^2 + 1) = 0$ é igual a
a) 5/2 b) 3/2 c) – 3/2 d) – 3/2 e) – 5/2

**16)** (UFC-04) As raízes da equação $x^2 - px + q = 0$, onde p e q são constantes, são os cubos das raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$. Determine os valores de p e q.

**17)** (Colégio Naval-12) A soma das raízes de uma equação do 2º grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é 0,25. Determine o valor de $\frac{a^3 - b^3 - 2ab^2}{a^2 - b^2}$ sabendo que 'a' e 'b' são as raízes dessa equação do 2º grau e a > b, e assinale a opção correta.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ c) – 1 d) $\sqrt{2}+\frac{1}{4}$ e) $\sqrt{2}-\frac{1}{4}$

**18)** (Colégio Naval-20) Multiplicando os valores reais distintos que resolvem a equação $(x^3 - 6x^2 + 12x - 4)^2 - 15(x^3 - 6x^2 + 12x - 4) + 36 = 0$, encontra-se, como resultado:
a) 4 b) 6 c) 9 d) 12 e) 18

**19)** (Colégio Naval-13) Determine, no conjunto dos números reais, a soma dos valores de x na igualdade $\left(\frac{1}{1+\frac{x}{x^2-3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{x-\frac{3}{x}}\right)=1$
a) -2/3 b) -1/3 c) 1 d) 2 e) 11/3

**20)** (Epcar-14) Fernando, um aluno aplicado em matemática, propôs a seus colegas o desafio de descobrirem os coeficientes e as raízes de três equações do 2° grau, todas na forma $ax^2 + bx + c = 0$.
Ele afirmou que:
• Os coeficientes dos termos de maiores graus da 2ª e da 3ª equações são iguais ao menor número inteiro positivo.
• O conjunto solução da 1ª equação é $\{-1,-2\}$ e a 2ª equação possui duas raízes reais e iguais a 3;
• O coeficiente do termo de maior grau da 1ª equação é igual ao oposto do coeficiente de maior grau da 3ª equação;
• O coeficiente de x da 3ª equação é a metade do coeficiente de x da 2ª equação.
• O produto das raízes da 3ª equação é igual a unidade.
Com base nesses dados, marque a alternativa FALSA.
a) A soma dos coeficientes da 1ª equação é um número que pode ser escrito como 2k, tal que $k \in Z$.
b) A soma das raízes das três equações é igual ao oposto do coeficiente de x da 2ª equação.
c) A razão entre o termo independente de x da 3ª equação e o termo independente de x da 1ª equação é um número do conjunto $Q_-$
d) A diferença entre as raízes da 3ª equação é um número racional.

**21)** (Colégio Naval-19) O maior valor inteiro de 'k' para que $x^2 + 2018x + 2018k = 0$ tenha soluções reais é:
a) 2018 b) 1010 c) 1009 d) 505 e) 504

**22)** (Epcar-19) Considere as equações:
(I) $x^2 - bx + 15 = 0$ $(b \in IR)$ cujas raízes são os números reais $\alpha$ e $\beta$ $(\alpha < \beta)$
(II) $x^2 + kx + 15 = 0$ $(k \in IR)$
Sabe-se que as raízes da equação (I) são, cada uma, 8 unidades menores do que as raízes da equação (II). Com base nessas informações, marque a opção correta.
a) $b^3 - k$ é um número negativo.
b) O valor absoluto da diferença entre as raízes da equação (I) é 1
c) As raízes da equação (II) NÃO são números primos.
d) $\alpha^2 - \beta^2$ é um número que é divisor de 8

**23)** (Colégio Naval-20) Seja 'A' o conjunto das soluções reais da equação $\sqrt{(x^2 - 5x + 6)^4} = \frac{1}{16}$. A quantidade de elementos do conjunto 'A' é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

**24)** (Colégio Naval-19) As equações na incógnita 'x' dadas por $ax + b = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$, onde 'a', 'b' e 'c' são números reais e $a \neq 0$, possuem uma única raiz comum.

Sabendo que 'm' e 'n' são as raízes da equação do 2° grau, marque a opção que apresenta o valor da soma $m^{2018} + n^{2018}$.

a) $\left(\frac{c}{b}\right)^{2018}$ b) $\left(\frac{ab}{c}\right)^{2018}$ c) $\left(\frac{c}{a}\right)^{2018}$ d) $\left(\frac{bc}{a}\right)^{2018}$ e) $\left(\frac{b}{a}\right)^{2018}$

**25)** (Colégio Naval-77) Dar os valores de m, na equação $mx^2 - 2mx + 4 = 0$, para que as suas raízes tenham o mesmo sinal

(A) $m \leq 0$ (B) $m \geq 3$ (C) $m \geq 7$ (D) $m \leq 5$ (E) $m \geq 4$

**26)** (Colégio Naval-78) Se as equações do 2° grau $(2p + q)x^2 - 6qx - 3 = 0$ e $(6p - 3q)x^2 - 3(p - 2)x - 9 = 0$ possuem as mesmas raízes, então :

(A) $p = 6q + 2$ (B) $p + q = 7$ (C) $3q = p + 2$

(D) $p - 2 = 0$ (E) $2p + 3q = 8$

**27)** (Colégio Naval-16) 9) Seja x um número real tal que

$$x^3 + x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + 2 = 0.$$

Para cada valor real de x, obtém-se o resultado da soma de $x^2$ com seu inverso. Sendo assim, a soma dos valores distintos desses resultados é

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

**28)** (Colégio Naval-80) O valor de p para que o trinômio do 2° grau $px^2 - 4p^2x + 24p$ tenha máximo igual a 4k, quando $x = k$ é:

(A) 2 (B) $-2$ (C) 3 (D) $-3$ (E) 1

**29)** (Colégio Naval-80) O valor de k na equação $x^2 + Mx + k = 0$, para que uma de suas raízes seja o dobro da outra e o seu discriminante seja igual a 9 é:

(A) 20 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 18

**30)** (Colégio Naval-81) O trinômio do segundo grau $y = (k + 1)x^2 + (k + 5)x + (k^2 - 16)$ apresenta máximo e tem uma raiz nula. A outra raiz é:

a) uma dízima periódica positiva b) uma dízima periódica negativa

c) decimal exata positiva d) decimal exata negativa

e) inteira

**31)** (Colégio Naval-81) Se o trinômio: $y = mx(x - 1) - 3x^2 + 6$ admite $-2$ como uma de suas raízes, podemos afirmar que o trinômio :

(A) tem mínimo no ponto $x = -0,5$ (B) pode ter valor numérico 6,1

(C) pode ter valor numérico 10 (D) tem máximo no ponto $x = 0,5$

(E) tem máximo no ponto $x = -0,25$

**32)** (Colégio Naval-82) Na equação $x^2 - mx - 9 = 0$, a soma dos valores de m, que fazem com que as suas raízes **a** e **b** satisfaçam a relação $2a + b = 7$ dá:
a) 3,5 b) 20 c) 10,5 d) 10 e) 9

**33)** (Colégio Naval-82) Relativamente ao trinômio: $y = x^2 - bx + 5$, com **b** constante inteira, podemos afirmar que ele pode:
a) se anular para um valor de x
b) se anular para dois valores reais de x cuja soma seja 4
c) se anular para dois valores reais de x de sinais contrários
d) ter valor mínimo igual a 1
e) ter máximo para b = 3

**34)** (Colégio Naval-17) Seja $p(x) = x^2 - 2016x - 2017$ um polinômio com "x" real tal que $p(60002) = k$. Sendo assim, o valor de $p(-57986)$ é
a) k b) $2k + 1$ c) $k^2$ d) $3k^2 - 1$ e) $5 - k^2$

**35)** (Colégio Naval-84) A soma dos cubos das raízes da equação $x^2 + x - 3 = 0$, é:
(A) −10 (B) −8 (C) −12 (D) −6 (E) −18

**36)** (Colégio Naval-18) Seja o número real x tal que $W = \frac{2x^2}{9} - \frac{\sqrt{6}}{6}x + 21$. Sendo assim, qual o valor de x para que W seja mínimo?
a) $3\sqrt{6}$ b) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ c) $7\sqrt{9}$ d) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ e) $6\sqrt{6}$

**37)** (Colégio Naval-86) Sejam r e s as raízes da equação $x^2\sqrt{3} + 3x - \sqrt{7} = 0$. O valor numérico da expressão $(r + s + 1)(r + s - 1)$ é
(A) 2/7 (B) 3/7 (C) 9/7 (D) 4/3 (E) 2

**38)** (Colégio Naval-87) A média harmônica entre as raízes da equação
$340x^2 - 13x - 91 = 0$ é:
(A) 7 (B) −7 (C) $\frac{340}{7}$ (D) $\frac{1}{7}$ (E) − 14

**39)** (Colégio Naval-88) A equação do 2° grau $x^2 - 2x + m = 0$, $m < 0$, tem raízes $x_1$ e $x_2$. Se $x_1^{n-2} + x_2^{n-2} = a$ e $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} = b$, então $x_1^n + x_2^n$ é igual a:
(A) $2a + mb$ (B) $2b - ma$ (C) $ma + 2b$ (D) $ma - 2b$ (E) $m(a - 2b)$

**40)** (Colégio Naval-89) As raízes da equação $2x^2 - x - 16 = 0$ são r e s (r > s). O valor da expressão $\frac{r^4 - s^4}{r^3 + r^2 s + rs^2 + s^3}$, é

(A) $\frac{\sqrt{129}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{127}}{2}$ (C) $\frac{127}{4}$ (D) $\frac{129}{4}$ (E) impossível de ser calculado.

**41)** (Colégio Naval-90) Um aluno ao tentar determinar as raízes $x_1$ e $x_2$ da equação $ax^2 + bx + c = 0$, a.b.c ≠ 0, explicou x da seguinte forma $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$.

Sabendo-se que não teve erro de contas, encontrou como resultado:

(A) $x_1$ e $x_2$ (B) $-x_1$ e $-x_2$ (C) $x_1^{-1}$ e $x_2^{-1}$

(D) c.$x_1$ e c.$x_2$ (E) a.$x_1$ e a.$x_2$

**42)** (Colégio Naval-91) As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são iguais a m e n. Assinale a equação cujas raízes são $m^3$ e $n^3$.

a) $a^3x^2 - b(3ac + b^2)x + c^3 = 0$ b) $ax^2 - b(3ac - b^2)x + c = 0$

c) $ax^2 + b(b^2 - 3ac)x + c = 0$ d) $a^3x^2 + b(b^2 - 3ac)x - c^3 = 0$

:) $a^3x^2 + b(b^2 - 3ac)x + c^3 = 0$

**43)** (Colégio Naval-20) Seja $y = mx^2 + (m - 1)x - 16$ um trinômio do 2º grau na variável 'x' e com 'm' pertencente ao conjunto dos números reais. Sabendo-se que as raízes $r_1$ e $r_2$ de y são tais que $r_1 < 1 < r_2$, a soma dos possíveis valores inteiros e distintos de 'm' é:

a) 36 b) 42 c) 49 d) 53 e) 64

**44)** (Colégio Naval-92) Para se explicitar **x** na equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, usa-se o recurso da complementação de quadrados. Usando-se o recurso da complementação de cubos um aluno determinou uma raiz real da equação, $x^3 - 6x^2 + 12x - 29 = 0$. Pode-se afirmar que:

a) $0 < r < 1$ b) $1 < r < 2$ c) $2 < r < 3$ d) $3 < r < 4$ e) $4 < r < 5$

**45)** (Colégio Naval-93) Sendo **m** e **n** as raízes da equação $x^2 - 10x + 1 = 0$, o valor da expressão: $\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3}$ é

(A) 970 (B) 950 (C) 920 (D) 900 (E) 870

**46)** (Colégio Naval-95) O trinômio $y = x^2 - 14x + k$, onde k é uma constante real positiva, tem duas raízes reais distintas. A maior dessas raízes pode ser:

(A) 4 (B) 6 (C) 11 (D) 14 (E) 17

47) (Colégio Naval-96) Considere a equação do 2° grau em x tal que $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com "a" diferente de zero. Sabendo que 2 e 3 são raízes dessa equação, pode-se afirmar que:
(A) $13a + 5b + 2c = 0$ (B) $9a + 3b - c = 0$ (C) $4a - 2b + c = 0$
(D) $5a - b = 0$ (E) $36a + 6b + c = 0$

48) (Colégio Naval-97) A soma e o produto das raízes reais da equação $(x^2 - 5x + 6)^2 - 5(x^2 - 5x + 6) + 6 = 0$, são respectivamente:
a) 6 e 8 b) 7 e 10 c) 10 e 12 d) 15 e 18 e) 15 e 20

49) (Colégio Naval-00) Sobre a equação: $1999x^2 - 2000x - 2001 = 0$, a afirmação correta é:
(A) Tem duas raízes reais de sinais contrários, mas não simétricas.
(B) Tem duas raízes simétricas.
(C) Não tem raízes reais.
(D) Tem duas raízes positivas.
(E) Tem duas raízes negativas.

50) (Colégio Naval-03) Considere a equação $x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0$ com parâmetro m inteiro não nulo. Se essa equação tem duas raízes reais e distintas com o número 4 compreendido entre essas raízes, então o produto de todos os possíveis valores de m é igual a.
a) – 2 b) – 1 c) 2 d) 4 e) 6

51) (Colégio Naval-04) Dada a equação: $(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 3x - 17)^2 = 0$, pode-se afirmar que, no universo dos números reais, o seu conjunto solução.
a) é vazio. b) tem apenas um elemento.
c) tem apenas dois elementos. d) tem apenas três elementos.
e) tem apenas quatro elementos.

52) (Colégio Naval-05) Um professor de Matemática apresentou uma equação do 2° grau completa, com duas raízes reais positivas, e mandou calcular, as médias aritmética, geométrica e harmônica entre essas raízes, sem determiná-las. Nessas condições
a) somente foi possível calcular a média aritmética.
b) somente foi possível calcular as médias aritmética e geométrica.
c) somente foi possível calcular as médias aritmética e harmônica.
d) foi possível calcular as três médias pedidas.
e) não foi possível calcular as três médias pedidas.

**53)** (Colégio Naval-05) Dada a equação na variável real x: $7x - \frac{3}{x} = k$, pode-se concluir, em função do parâmetro real k, que essa equação
a) tem raízes reais só se k for um número positivo.
b) tem raízes reais só se k for um número negativo.
c) tem raízes reais para qualquer valor de k.
d) tem raízes reais somente para dois valores de k.
e) nunca terá raízes reais.

**54)** (Colégio Naval-07) A expressão $x = \frac{-b \pm \sqrt{23 * 4}}{8}$ determina as raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$, de coeficientes inteiros positivos e raízes racionais. Sabendo-se que o símbolo * está substituindo um algarismo, qual é o menor valor numérico para esse trinômio?
a) −72 b) −144 c) −172 d) −288 e) −324

**55)** (Colégio Naval-08) Qual é a soma das raízes quadradas das raízes da equação do 2° grau $x^2 - 6x + 2 = 0$?
a) $(6 + 2 \cdot 2^{1/2})^{1/2}$ b) $(6 + 2 \cdot 3^{1/2})^{1/2}$ c) $(3 + 2 \cdot 2^{1/2})^{1/2}$
d) $(3 + 2 \cdot 3^{1/2})^{1/2}$ e) $(3 + 3 \cdot 2^{1/2})^{1/2}$

**56)** (Colégio Naval-08) Qual é a soma dos valores reais de x que satisfazem a equação $x^2 - 3x + 1 + (x^2 - 3x + 2)^{-1} = 1$?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

**57)** (Colégio Naval-09) O número $a \neq 0$ tem inverso igual a b. Sabendo-se que $a + b = 2$, qual é o valor de $(a^3 + b^3)(a^4 - b^4)$?
a) 8 b) 6 c) 4 d) 2 e) 0

**58)** (Colégio Naval-09) Qual é a soma dos quadrados das raízes da equação $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 1$, com x real e $x \neq \pm 1$?
a) 16 b) 20 c) 23 d) 25 e) 30

**59)** (Colégio Naval-10) A menor raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $abc \neq 0$ é a média geométrica entre "m" e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre "n" e a menor raiz. Pode-se afirmar que "m+n" é expresso por:
a) $\frac{3abc - b^3}{a^2c}$ b) $\frac{3abc - b^3}{a^2c}$ c) $\frac{3abc + b^3}{c^2a}$ d) $\frac{abc + b^3}{c^2a}$ e) $\frac{abc - b^3}{a^2c}$

**60)** (Colégio Naval-11) No conjunto 'R' dos números reais, qual será o conjunto solução da equação $\frac{\sqrt{3}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{3}}{2x-2} - \frac{\sqrt{3}}{2x+2}$?

a) R  b) R - (-1; 1)  c) R - [-1, 1]  d) R - {-1; +1}  e) R - [-1; 1)

**61)** (EPCAr-15) Uma professora de Matemática pediu que seus alunos resolvessem uma equação do segundo grau da forma $x^2 + bx + c = 0$ em que $b$ e $c \in \mathbb{R}$. Mariana copiou o coeficiente "c" errado, obtendo $-1/2$ e 4 como raízes. Maria Clara copiou errado o coeficiente "b" e encontrou as raízes 1 e $-3/2$. Sobre a equação proposta pela professora, é correto afirmar que

a) uma das raízes é menor que $-1$

b) possui duas raízes inteiras e distintas.

c) uma das raízes é maior que 3

d) não possui raízes reais.

**62)** (EPCAr-17) Considere, em $\mathbb{R}$, a equação $(m + 2)x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$ na variável x, em que m é um número real diferente de $-2$. Analise as afirmativas abaixo e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) Para todo $m > 2$ a equação possui conjunto solução vazio.

( ) Existem dois valores reais de m para que a equação admita raízes iguais.

( ) Na equação, se $\Delta > 0$, então m só poderá assumir valores positivos.

A sequência correta é

a) V – V – V  b) F – V – F  c) F – F – V  d) V – F – F

**63)** (EPCAr-02) A equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes reais opostas e não-nulas. Pode-se então afirmar que

a) $p > 0$ e $q = 0$  c) $p = 0$ e $q > 0$  b) $p < 0$ e $q = 0$  d) $p = 0$ e $q < 0$

**64)** (EPCAr-02) A equação $ax^2 - 2bx + ab = 0$ $(b \neq 0)$ admite raízes reais e iguais se, e somente se

a) $b = a^2$  b) $b = 2a^2$  c) $a = -b$  d) $b^2 = 2a$

**65)** (AFA-16) Uma fábrica produz casacos de determinado modelo. O preço de venda de um desses casacos é de R$ 200,00, quando são vendidos 200 casacos. O gerente da fábrica, a partir de uma pesquisa, verificou que, para cada desconto de R$ 2,00 no preço de cada casaco, o número de casacos vendidos aumenta de 5. A maior arrecadação possível com a venda dos casacos acontecerá se a fábrica vender cada casaco por um valor, em reais, pertencente ao intervalo

a) [105, 125[  b) [125, 145[  c) [145, 165[  d) [165, 185[

66) (EPCAr-03) Num laboratório, a temperatura obtida em determinada experiência, em graus centígrados, é dada pela função $f(t) = -\frac{t^2}{8} + t + 20$, onde t é o tempo em segundos ($t \geq 0$). É correto afirmar que a temperatura
a) é sempre positiva.
b) máxima é 20 graus.
c) máxima ocorre para t = 4 segundos.
d) nunca será igual a zero.

67) (EPCAr-04) Na equação $x^2 + kx + 36 = 0$, de modo que entre as raízes x' e x'' exista a relação $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$, o valor de k é um número
a) negativo. b) primo. c) par. d) natural.

68) (EPCAr-05) As raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ são r ou s. A equação cujas raízes são ar + b ou as + b é
a) $x^2 - bx - ac = 0$ c) $x^2 + 3bx + ca + 2b^2 = 0$
b) $x^2 - bx + ac = 0$ d) $x^2 + 3bx - ca + 2b^2 = 0$

69) (EPCAr-05) A soma dos quadrados das raízes da equação $5x^2 - 2px - p = 0$ é $\frac{104}{25}$. Vale então dizer que o valor positivo de p é um número
a) par b) primo maior que 10 c) divisor de 15 d) menor que 1

70) (EPCAr-06) Sejam m e n as raízes inteiras da equação $x^2 - qx + p = 0$. Sabendo-se que $m^n.n^m.m^m.n^n = 81$, pode-se afirmar que
a) p é divisor de 4 c) pq é inteiro negativo.
b) m e n são ímpares. d) q é múltiplo de 81

71) (EPCAr-09) Uma professora de 8ª série colocou numa avaliação três equações do 2º grau na incógnita x para serem resolvidas. Ela observou que essas equações tinham as seguintes características:
• a primeira e a terceira equações possuem os coeficientes do termo de maior grau unitário e os coeficientes de x iguais;
• a terceira equação tinha conjunto solução {−6, 2}
• na primeira e na segunda equações o termo independente de x era o mesmo e os coeficientes do termo de maior grau eram opostos;
• a segunda equação tinha conjunto solução {1, 3}
Com base nesses dados, é correto afirmar que a
a) diferença entre as raízes da primeira equação é um número que pertence ao conjunto [IR − Q]

b) soma dos coeficientes da primeira equação NÃO é par.
c) razão entre o termo independente de x da segunda equação e o termo independente de x da terceira equação é um número inteiro.
d) soma dos coeficientes da segunda equação é diferente de zero.

**72)** (EPCAr-11) Analise a alternativa abaixo, considerando todas as equações na incógnita x, e, a seguir, marque a correta.
a) Na equação $x^2 - mx + n = 0$ ($m, n \in IR$), sabe-se que a e b são raízes reais. Logo, o valor de $(a + b) - (a.b)$ é, necessariamente, $(n - m)$
b) Para que a soma das raízes da equação $2x^2 - 3x + p = 0$ ($p \in IR$) seja igual ao produto dessas raízes, p deve ser igual a 3/2.
c) Se a equação $3x^2 - 3x + m = 0$ ($m \in IR$) NÃO possui raízes reais, então o valor de m pode ser igual a $-3/4$.
d) Uma das raízes da equação $x^2 + Sx - P = 0$ ($S, P \in IR$) é o número 1, logo $(S - P)$ é igual a $-1$.

**73)** (Colégio Naval-14) Uma das raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, c pertencentes ao conjunto dos números reais, sendo $a \neq 0$, é igual a 1. Se $b - c = 5a$ então, $b^c$ em função de a é igual a:

a) $-3a^2$ b) $2^a$ c) $2a3^a$ d) $\frac{1}{(2a)^{3a}}$ e) $\frac{1}{2^{(3a)}a^{(3+a)}}$

**74)** (Epcar-20) Para homenagear os aniversariantes do mês de junho, um grupo de alunos das turmas FOX e GOLF do esquadrão SABRE decidem fazer um churrasco comemorativo e dividir a despesa total. Na véspera do churrasco, 6 desses alunos foram convocados pelo seu Comandante para uma atividade que os impediu de comparecerem ao evento comemorativo, sendo esses 6 alunos excluídos do rateio da despesa total. Com a ausência desses 6 alunos, foi cobrado de cada um dos demais, certo valor a mais. Ao fazerem o rateio, os alunos perceberam que a despesa total era igual ao valor cobrado a mais de cada um dos alunos que contribuíram, multiplicado por 180 Se o número de alunos que foram ao churrasco é k, então, a soma dos algarismos de k é
a) 3 b) 5 c) 7 d) 9

**75)** (IME-77) Seja $a, b \in IR^*$. Mostre que a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0$ possui todas suas raízes reais, sendo uma no intervalo $]-b, 0[$ e a outra no intervalo $]0, a[$.

**76)** (OBM-99) Sendo $a \neq b$ e $b \neq 0$, sabe-se que as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$ são exatamente a e b. Então, $a - b$ é igual a:
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**77)** (OBM-03) A maior raiz da equação $(x - 37)^2 - 169 = 0$ é:
A) 39 B) 43 C) 47 D) 50 E) 53

**78)** (OBM-07) As equações do 2º grau $2007x^2 + 2008x + 1 = 0$ e $x^2 + 2008x + 2007 = 0$ têm uma raiz comum. Qual é o valor do produto das duas raízes que não são comuns?
A) 0 B) 1 C) 2007 D) 2008 E) 2007

**79)** (OBM-15) Um número é dito *impadrático* quando é raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros ímpares. Por exemplo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é impadrático, pois é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Qual dos números a seguir é impadrático?
A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ D) $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$ E) $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$

**80)** (Olimpíada da Bahia-13) Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raiz racional.

**81)** (Olimpíada de Campina Grande-11) Seja a um número inteiro positivo ímpar. Determine a de modo que a equação $x^2 - ax + 2a = 0$ tenha duas raízes inteiras.

**82)** (Olimpíada de Campina Grande-19) Determine p e q de modo que $p + q$ e $p - q$ sejam as raízes de $x^2 + 4qx + p = 0$.

**83)** (Olimpíada do Ceará-83) Determine o valor de p para que as raízes $x_1$ e $x_2$ da equação $2x^2 - px - 1 = 0$ satisfaça a relação $x_1^3 + x_2^3 = 1$.

**84)** (Olimpíada do Ceará-94) Determine os dois valores reais de a para que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + x + a = 0$ tenham pelo menos uma raiz comum.

**85)** (Olimpíada do Ceará-99) Na equação $x^2 - px + q = 0$ os números p e q são inteiros positivos.
a) Mostre que se essa equação tem duas raízes reais e iguais, então p é par.
b) Em que situação essa equação não possui raízes reais e iguais? Justifique.

**86)** (Olimpíada do Rio Grande do Norte-18) A soma dos valores possíveis de k para os quais as equações quadráticas $x^2 - 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 5x + k = 0$ tem uma raiz em comum é:
(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

**87)** (OBM-96) a, b, c, d são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$ e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.

**88)** (OBM-07) Sejam $\alpha$ e $\beta$ as raízes da equação quadrática

$$(x-2)(x-3) + (x-3)(x+1) + (x+1)(x-2) = 0.$$

Determine o valor de $\dfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \dfrac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$.

**89)** (OBM-08) Os números $\alpha$ e $\beta$ são as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Calcule $13\cdot\alpha^5 + 5\cdot\beta^7$.

**90)** (OBM-09) Observe:

$$(x-r)(x-s) = x^2 - (r+s)x + rs$$

Assim, substituindo $x$ por $r$ e por $s$, obtemos

$$\begin{vmatrix} r^2 - (r+s)r + rs = 0 \\ s^2 - (r+s)s + rs = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a(r^{n+2} - (r+s)r^{n+1} + rs\cdot r^n) = 0 \\ b(s^{n+2} - (r+s)s^{n+1} + rs\cdot s^n) = 0 \end{vmatrix}$$

Somando as duas equações e sendo $S_n = a\cdot r^n + b\cdot s^n$, verifica-se que

$$S_{n+2} = (r+s)S_{n+1} - rsS_n$$

Dados $S_1 = ar + bs = 1$, $S_2 = ar^2 + bs^2 = 2$, $S_3 = ar^3 + bs^3 = 5$ e $S_4 = ar^4 + bs^4 = 6$, determine $S_5 = ar^5 + bs^5$.

**91)** (OBM-14) As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são diferentes de zero e são os quadrados das raízes da equação $x^2 - bx + a = 0$. As raízes não são necessariamente reais, mas a e b são reais. Então o valor de a é:

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{3}$

**92)** (OBM-14) Sejam $p$ e $q$ inteiros. Sabendo que $x^2 + px + q$ é positivo para todo $x$ inteiro, prove que a equação $x^2 + px + q = 0$ não possui solução real.

**93)** (Olimpíada da Espanha-06) Calcular os números $p$ e $q$ tais que as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ sejam $\Delta$ e $1 - \Delta$, sendo $\Delta$ o discriminante dessa equação de segundo grau.

**94)** (Olimpíada da Espanha-05) Sejam a, b, c números reais não nulos e $a \neq b$. Provar que se as equações $x^2 + ax + bc = 0$ e $x^2 + bx + ca = 0$ tem uma raiz comum, então as restantes raízes verificam a equação $x^2 + cx + ab = 0$.

95) (Revista Gazeta Matemática-87) Seja $f(x) = a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Provar que se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 0$, então n é um quadrado perfeito.

96) (Olimpíada da Bulgária-97) Determine todos os valores do parâmetro real m tal que a equação

$$[x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1)][x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)] = 0$$

possua exatamente 3 raízes distintas.

97) (Olimpíada do Canadá-88) Para quais valores de b as equações $1988x^2 + bx + 8891 = 0$ e $8891x^2 + bx + 1988 = 0$ possuem uma raiz comum?

98) (OBM-98) Dois meninos jogam o seguinte jogo. O primeiro escolhe dois números inteiros diferentes de zero e o segundo monta uma equação do segundo grau usando como coeficientes os dois números escolhidos pelo primeiro jogador e 1998, na ordem que quiser (ou seja, se o primeiro jogador escolhe $a$ e $b$ o segundo jogador pode montar a equação $1998x^2 + ax + b = 0$, ou $bx^2 + 1998x + a = 0$, etc.) O primeiro jogador é considerado vencedor se a equação tiver duas raízes racionais diferentes. Mostre que o primeiro jogador pode ganhar sempre.

99) (OBM-93) É dada uma equação do 2º grau $x^2 + ax + b = 0$ com raízes inteiras $a_1$ e $b_1$. Consideremos a equação do 2º grau $x^2 + a_1x + b_1 = 0$. Se a equação $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ tem raízes inteiras $a_2$ e $b_2$, consideremos a equação $x^2 + a_2x + b_2 = 0$. Se a equação $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ tem raízes $a_3$ e $b_3$, consideremos a equação $x^2 + a_3x + b_3 = 0$. Se encontrarmos uma equação com $\Delta < 0$ ou com raízes que não sejam números inteiros, encerramos o processo. Exemplos:

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ e não podemos continuar, pois as raízes de $x^2 - x - 1 = 0$ são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, números não inteiros.

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$ e não podemos continuar pois $\Delta = -7 < 0$

$\therefore x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \ldots$ neste caso podemos continuar o processo indefinidamente (isto é, em nenhuma equação ocorre $\Delta < 0$ ou raízes não inteiras).

a) Determine uma outra equação que, como $x^2 = 0$, nos permita continuar o processo indefinidamente.

b) Determine todas as equações do 2º grau completas a partir das quais possamos continuar o processo indefinidamente.

**Equações Biquadradas**

1) (CM Brasília-04) Considere 2, –2, 3 e –3 como raízes de uma equação biquadrada. Substituindo a variável por –1, na equação que gerou tais raízes, obtém-se:
A ( ) 48 B ( ) 22 C ( ) 50
D ( ) 24 E ( ) –22

2) (CM RJ-05) Dada a equação $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$, podemos afirmar que:
A) tal equação possui 4 raízes reais.
B) duas de suas raízes são números racionais.
C) a soma das suas raízes reais é igual a -4.
D) o produto das suas raízes reais é igual a -5.
E) o produto das suas raízes reais é igual a -45.

3) (Colégio Naval-92) O número de soluções inteiras da equação $4x^5 + 11x^3 - 3x = 0$ é:
a) 5 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

4) (Colégio Naval-92) Se a equação $x^4 - 4(m + 2)x^2 + m^2 = 0$ admite quatro raízes reais, então:
a) o maior valor inteiro de **m** é –3.
b) a soma dos três menores valores inteiros de **m** é zero.
c) a soma dos três maiores valores inteiros de **m** é -12.
d) só existem valores inteiros e positivos para **m**.
e) só existem valores negativos para **m**.

5) (Colégio Naval-94) A soma das raízes da equação de raízes reais: $mx^4 + nx^2 + p = 0$, $m \neq 0$, é:
a) 0 b) $-\frac{n}{m}$ c) $-\frac{2n}{m}$ d) $\frac{P}{m}$ e) $-\frac{P}{m}$

6) (Colégio Naval-98) Duas raízes da equação biquadrada $x^4 + bx^2 + c = 0$ são $0,2333...$ e $\frac{30}{7}$. O valor de $c$ é:
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) – 1

7) (Colégio Naval-00) Uma equação biquadrada de coeficientes inteiros, cuja soma desses coeficientes é zero, tem uma das raízes igual a $\sqrt{3}$. O produto das raízes dessa equação é:
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8) (Colégio Naval-02) A equação $x^4 - (a-6)x^2 + (9-a) = 0$, na variável x, tem quatro raízes reais e distintas, se e somente se:

a) $a > 8$ b) $6 < a < 8$ c) $8 < a < 9$ d) $6 < a < 9$ e) $a > 9$

9) (Colégio Naval-06) Os números reais positivos a e b satisfazem a igualdade: $a\sqrt{(a^2 + 2b^2)} = b\sqrt{(9a^2 - b^2)}$. Um valor possível para $\frac{a}{b}$ é

a) $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

10) (EPCAr-00) Em IR, o produto dos elementos do conjunto verdade da equação $x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0$ na variável x, em que $a \in \mathbb{R}^*$, é

a) $-4a^4$ b) $16a^8$ c) $4a^4$ d) $2a^4$

11) (Colégio Naval-14) Dada a equação $(2x+1)^2(x+3)(x-2) + 6 = 0$, qual é o valor da soma das duas maiores raízes reais desta equação?

a) 0 b) 1 c) $\sqrt{6} - 1/2$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{6} + 1$

Dica: Faça $x = y - 1/2$

12) Resolver as equações biquadradas:

a) $(x^2 - 2)^2 + (x^2 - 4)^2 = 4$

b) $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$

c) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{10}{x^2+1} = \frac{x^2}{10}$

d) $5x^{-4} - 2x^{-2} - 3 = 0$

e) $\frac{x^2-5}{x^2+2} - \frac{2}{x^2-2} = \frac{2x^2-12}{x^2-4}$

f) $a^2x^4 - (a^4 + 1)x^2 + a^2 = 0$

13) Considere a equação biquadrada $\frac{1}{4}x^4 + px^2 + q = 0$.

a) Determine as condições sobre p e q de modo que as 4 raízes sejam reais.

b) Satisfeitas as condições do item a, determine as 4 raízes reais da equação biquadrada.

## Equações Modulares

1) (EPCAr-99) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real dessa equação, pode-se afirmar que a
a) solução pertence ao intervalo fechado [ 1, 2 ].
b) solução pertence ao intervalo fechado [ -2, -1 ].
c) solução pertence ao intervalo aberto ] - 1, 1 [.
d) equação não tem solução.

2) (Colégio Naval-92) Se r é a menor raiz real da equação $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^4} = \sqrt{x^6}$, então:
a) $r < -1$ b) $-1 < r < 0$ c) $r = 0$ d) $0 < r < 1$ e) $r > 1$

3) (Colégio Naval-95) Sobre o conjunto solução em R da equação $\sqrt{(2x+1)^2} = x - 3$, podemos afirmar que:
(A) é unitário cujo elemento é positivo
(B) possui dois elementos em que um é racional e o outro irracional
(C) é vazio
(D) é unitário cujo elemento é negativo
(E) possui dois elementos irracionais

4) (Colégio Naval-98) O aluno Mauro, da 8ª série de um certo colégio, para resolver a equação $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$, no conjunto dos números reais, observou-se que $x^4 = x^2 - 2x + 1$ e que o segundo membro da equação é um produto notável. Desse modo, concluí que $(2x + 1)^2$ é igual a:
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

5) (Colégio Naval-04) Analise as afirmativas abaixo, onde a e b são números reais.
I - $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = \sqrt{(a+b)^2}$
II - $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{(a.b)^2}$
III - $\dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}$, $b \neq 0$
Analise a alternativa correta.
a) As afirmativas I, II e III são sempre verdadeiras.
b) Apenas a afirmativa I é sempre verdadeira.
c) Apenas as afirmativas I e II são sempre verdadeiras.
d) Apenas as afirmativas I e III são sempre verdadeiras.
e) Apenas as afirmativas II e III são sempre verdadeiras.

6) (Colégio Naval-11) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x + 2$

a) é vazio b) é unitário c) possui dois elementos
d) possui três elementos e) possui quatro elementos

7) (EsPCEx-00) O valor da soma entre o menor e o maior valor assumido pela expressão $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{2xy}{|xy|}$, quando x e y variam no conjunto de todos os números reais não nulos, é:

a) – 6 b) – 2 c) 2 d) 4 e) 6

8) (EsPCEx-01) O conjunto-solução do sistema $\begin{cases} |x| - |y| = 0 \\ 2xy + 4y + 2 = 0 \end{cases}$

a) Possui exatamente dois elementos
b) Possui exatamente três elementos
c) É vazio
d) Possui somente um elemento
e) Possui exatamente quatro elementos

9) (EsPCEx-02) O número de raízes reais distintas da equação $x.|x| = -3x + 2 = 0$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

10) (EsPCEx-03) A soma dos quadrados de todas as raízes da equação

$$x^2 + 4x - 2.|x + 2| + 4 = 0$$

é igual a

A) 16. B) 20. C) 24. D) 28. E) 36.

11) (Escola Naval-90) A equação $|2x + 3| = ax + 1$:

a) não possui solução para $a < -2$; b) possui duas soluções para $a > 2$;
c) possui solução única para $a < 2/3$; d) possui solução única para $-2 < a < 2/3$;
e) possui duas soluções para $-2 < a < 2/3$.

12) (ITA-80) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real desta equação podemos afirmar que:

a) a solução pertence ao intervalo fechado [1, 2].
b) a solução pertence ao intervalo fechado [–2, –1].
c) a solução pertence ao intervalo aberto (–1, 1).
c) a solução pertence ao complementar da união dos intervalos anteriores.
e) a equação não tem solução.

13) (UECE-05) Em relação à equação $|x^2 + x| = x - 4$ é possível afirmar-se, corretamente, que ela
a) admite exatamente duas soluções reais
b) admite exatamente uma solução, que é real
c) admite duas soluções, sendo uma real e uma complexa (não real)
d) não admite soluções reais

14) (UEMS-02) Considere a equação $|x| - x = -4$. Com respeito à solução desta equação podemos afirmar que:
a) a solução pertence ao intervalo fechado [2, 6]
b) a solução pertence ao intervalo fechado [– 6, – 2]
c) a solução pertence ao intervalo aberto (– 6, 6)
d) a solução pertence a união dos intervalos anteriores.
e) a equação não tem solução.

15) (UEPA-03) Quanto ao conjunto solução da equação $|2x - 1| = x + 3$, é correto afirmar que:
a) É um conjunto vazio.
b) É um conjunto unitário cujo elemento pertence ao conjunto dos números racionais.
c) Todos os seus elementos são positivos.
d) Todos os seus elementos são negativos.
e) Todos os seus elementos pertencem ao conjunto dos racionais.

16) (UEPA-04) O conjunto solução da equação $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$ é igual a:
a) S = {-1, 3}  b) S = {-3, 3}  c) S = {-1, 1}
d) S = {-3, 1}  e) S = {1, 3}

17) (UEMS-06) O conjunto S, solução da equação $|x| = 2x + 1$ é:
a) S = {- 1/3, - 1}  b) S = {- 1/3}  c) S = {- 1}
d) S = {0, -1}  e) S = ∅

18) (UFPE-08) Quantas soluções, no conjunto dos números reais, a equação $|x| + |x - 1| = 3$ admite?
A) Nenhuma  B) Uma  C) Duas  D) Três  E) Quatro

19) (UFT-10) Resolva a equação $|x - 2| + |x + 1| - 5x = 0$, no conjunto dos números reais. O intervalo que contém a solução desta equação é:
a) [2/5, 4/5]  b) [1/7, 2/7]  c) [- 1/3, 1/5]
d) [- 1/3, 1/7]  e) [- 4/5, - 2/5]

**20)** (FGV-08) Determine o conjunto solução da equação modular

$$|x^2 - x - 6| + |x^2 + x - 2| = 0.$$

Para $x \in \mathbb{R}$.

**21)** (OBM-97) Seja $y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 3|$. Se $1 \leq x < 2$, então y é igual a:

A) $x + 4$ B) $3x - 2$ C) $x - 4$ D) $3x + 2$ E) $x - 2$

**22)** (Olimpíada do Canadá-73) Determine todos os reais que satisfazem a equação

$$|x + 3| - |x - 1| = x + 1.$$

**23)** (Olimpíada da Noruega-98) Quantas soluções reais existem para a equação modular:

$$|x - |2x - 1|| = 3$$

**24)** (Olimpíada da Bélgica-97) A número de soluções da equação

$$|x - 2| + |x - 3|^{-1} = 4 \text{ vale:}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

**25)** (OBM-15) O conjunto verdade da equação $(x - a)^2 = b^2$, sendo a, b reais positivos, é:

a) $\{a + b\}$ b) $\{a - b\}$ c) $\{a + b, a - b\}$
d) $\{-a + b, a + b\}$ e) $\{a + b, -a - b\}$

**26)** (AMC/10-20) Qual é a soma de todos os números reais x para os quais

$$|x^2 - 12x + 34| = 2?$$

a) 12 b) 15 c) 18 d) 21 e) 25

**27)** (AMC/12-18) Quantos pares de números reais (x, y) satisfazem o seguinte sistema de equações $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ ||x| - |y|| = 1 \end{cases}$?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 8

**28)** (AMC/10-10) Qual a soma de todas as soluções de

$$x = |2x - |60 - 2x||?$$

a) 32 b) 60 c) 92 d) 120 e) 124

**Equações irracionais**

**1)** (CM Brasília-08) Calcule o produto das raízes da equação $8+\sqrt{x^2-2}=x^2$

a) 66 b) – 66 c) – 6 d) 11 e) – 11

**2)** (CM Brasília-08) O número b, que é solução da equação

$$\frac{\sqrt{b+4}+\sqrt{b-4}}{\sqrt{b+4}-\sqrt{b-4}}=2,\text{ é}$$

A ( ) par B ( ) primo C ( ) divisor de 81

D ( ) múltiplo de 7 E ( ) negativo

**3)** (AFA-05) Os valores de x que satisfazem a equação $\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|}=2$ têm produto igual a

a) $-\frac{81}{256}$ b) $-\frac{27}{64}$ c) $-\frac{9}{16}$ d) $-\frac{3}{4}$

**4)** (CM Manaus-10) A solução da equação $x-\sqrt{2x+2}=3$ é

a) 1 b) – 1 c) 2 d) 3 e) 7

**5)** (EPCAr-05) Resolvendo-se a equação $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}=2$, encontra-se um número

a) par b) primo c) divisor de 81 d) múltiplo de 7

**6)** (CM RJ-06) A raiz da equação $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ é:

A) uma dízima periódica
B) um número natural, quadrado perfeito
C) um número racional, cujo inverso tem quatro divisores positivos
D) um número irracional
E) inexistente, em IR

**7)** (CM RJ-08) A soma das raízes da equação $\frac{3}{\sqrt[6]{x+1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}=2$ é:

a) – 3/2 b) – 63/64 c) 1 d) 3/2 e) 3

**8)** (IME-15) Encontre as soluções reais da equação:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}=\sqrt{x+3}$$

**9)** (Colégio Naval-14) A solução real da equação $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ é:

a) múltiplo de 3. b) par e maior que 17. c) ímpar e não primo.
d) um divisor de 130. e) uma potência de 2.

**10)** (Colégio Naval-77) Dar a soma das raízes da equação

$$\sqrt{2x-4}-3\sqrt[4]{2x-4}=-2$$

(A) 12,5 (B) 11,5 (C) 7 (D) 7,5 (E) 0

**11)** (Colégio Naval-78) Uma das raízes da equação $\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}=\sqrt{2}$ é:

(A) $\sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{5}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $-\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{6}$

**12)** (Colégio Naval-81) A soma das soluções da equação

$$\sqrt{2x+1}-4\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}=0$$

dá um número:

(A) nulo (B) par entre 42 e 310 (C) ímpar maior que 160
(D) irracional (E) racional

**13)** (Colégio Naval-85) A soma das raízes da equação:

$$x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$$

(A) 6 (B) −12 (C) 12 (D) 0 (E) −6

**14)** (Epcar-13) A equação $x=\sqrt{3x+a^2+3a}$, em que x é a incógnita e $a\in\mathbb{R}$ tal que $a<-3$, possui conjunto solução S, $S\subset\mathbb{R}$. Sobre S tem-se as seguintes proposições:

I) Possui exatamente dois elementos.
II) Não possui elemento menor que 2
III) Possui elemento maior que 3

Sobre as proposições acima, são verdadeiras

a) apenas I e II. b) apenas I e III. c) apenas II e III. d) I, II e III.

**15)** (Colégio Naval-95) O quociente entre a maior e a menor raiz da equação $\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x^8}}{x}=\frac{17}{4}$ é:

(A) $2^{27}$ (B) $2^{32}$ (C) $2^{36}$ (D) $2^{45}$ (E) $2^{54}$

16) (Colégio Naval-97) A solução da equação $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$ é:

a) uma dízima periódica.
b) um nº natural, quadrado perfeito.
c) um número racional cujo inverso tem 4 divisores positivos.
d) um número irracional.
e) inexistente.

17) (Colégio Naval-17) O conjunto solução da equação

$$x+1 = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2+4x+1}}$$

em IR, conjunto dos números reais, é

a) IR  b) $[-1, +\infty[$  c) $IR - [-1, +\infty[$  d) $[0, +\infty[$  e) $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

18) (Colégio Naval-07) Qual é a solução, no conjunto dos números reais, da equação $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = x$?

a) $x = \frac{1}{2}$  b) $x = -1$  c) $x = 1$  d) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$  e) $x = -\frac{1}{2}$

19) (Colégio Naval-09) A solução de $\sqrt{4x^2-4x+1} = \sqrt[3]{-1+6x-12x^2+8x^3}$ no campo dos números reais é:

a) o conjunto vazio.  b) {1/2}  c) {-1/2,1/2}
d) [1/2, + ∞ [  e) ] - ∞, +∞ [

20) (Colégio Naval-15) A solução real da equação $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$ é:

(A) múltiplo de 3.  (B) par e maior do que 17.
(C) impar e não primo.  (D) um divisor de 130.
(E) uma potência de 2.

21) (EPCAr-15) Considere $p \in IR_+^*$ e a equação $\sqrt{x-p} - \sqrt{p} + \sqrt{2x-p} = 0$ na variável x. Sobre o conjunto solução dessa equação, pode-se afirmar que

a) possui um único elemento positivo.
b) não possui elemento.
c) possui dois elementos positivos.
d) possui dois elementos de sinais opostos.

**22)** (Epcar-17) Sobre a equação $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$, respeitando sua validade no universo dos números reais, analise as afirmativas.

I. Possui duas raízes irracionais.

II. Não possui raízes negativas.

III. Possui conjunto solução com um único elemento.

Pode-se afirmar, então, que

a) todas são verdadeiras.
c) todas são falsas.

b) apenas a I é falsa.
d) apenas a III é verdadeira.

**23)** (Epcar-19) Sobre o conjunto solução, na variável x, $x \in IR$, da equação

$$x+2=\sqrt{x^2+2\sqrt{4x^2+8x+2}},$$

pode-se dizer que

a) é vazio.

b) possui somente um elemento.

c) possui dois elementos de sinais iguais.

d) possui dois elementos de sinais opostos.

**24)** (Colégio Naval-12) A quantidade de soluções reais e distintas da equação $3x^3-\sqrt{33x^3+97}=5$ é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 6

**25)** (ITA-72) Todas as raízes reais da equação $\sqrt{\frac{x^2+3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x^2+3}}=\frac{3}{2}$ são:

a) $x_1 = 1$ e $x_2 = -3$
b) $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$

c) $x_1 = 3$ e $x_2 = \sqrt{3}$
d) não tem raízes reais

e) nenhuma das respostas anteriores

**26)** (IME-02) Resolva a equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x$, sabendo-se que $x > 0$.

**27)** (Fuvest-18) Encontre todos os valores de x para os quais

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x=0.$$

**28)** (Olimpíada do Ceará-86) Resolva a equação $\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3$.

**29)** (Olimpíada do Ceará-89) Determine a soma e o produto das raízes reais da equação $x^2+18x+30=\sqrt{x^2+18x+45}$.

**30)** (Olimpíada do Ceará-02) Encontre as raízes reais da equação

$$\sqrt{\frac{x^2-2x-2}{x^2+4x+2}}+\sqrt{\frac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2}}=2.$$

**31)** (OBM-97) A equação $\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-3x}$

A) não tem solução
B) tem uma única solução positiva
C) tem uma única solução negativa
D) tem duas soluções uma positiva e outra negativa
E) tem duas soluções ambas negativas

**32)** (OBM-04) O conjunto das raízes reais da equação

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2 \text{ é}$$

A) $\{1\}$ B) $\{1,2\}$ C) $[1,2]$ D) $]1,2[$ E) $\{2\}$

**33)** (OBM-07) O conjunto dos valores de $c$ para os quais a equação $\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt{x}+c}$ possui solução real está contido em:

A) $[-1;\infty[$ B) $]-\infty;1]$ C) $[-3;2]$ D) $[-2;3]$ E) $Z$

**34)** (Olimpíada da Argentina-97) Encontrar todos os valores de x que são solução da equação $\sqrt{19-x}+\sqrt{97+x}=14$

**35)** (Canadian Correnpondence Program-07) Determine todos os números reais x que satisfazem $(8x-56)\sqrt{3-x}=30x-x^2-97$

**36)** (Olimpíada da Bahia-14) Resolva em IR a equação $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10}=5$.

**37)** (Olimpíada da Bahia-15) Determine o conjunto solução, no conjunto dos números reais, da equação $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

**38)** (Olimpíada do Ceará-12) Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}=2012$ tem solução real.

**39)** (OBM-05) Os inteiros positivos $x$ e $y$ satisfazem a equação

$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}-\sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}=1.$$

Qual das alternativas apresenta um possível valor de $y$?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**40)** (Olimpíada de Moscou-84) Resolva a equação $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$.

**41)** (AIME-83) Qual o produto das raízes reais da equação
$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}\,?$$

**42)** (Canadian Open Challenge-04) Determine todos os números reais c tais que
$$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$$
possui precisamente duas raízes reais distintas para x.

43) (Olimpíada do Espírito Santo-05) Ache todas as raízes reais da equação
$$\sqrt[4]{386 - x} + \sqrt[4]{x} = 6.$$

**43)** Resolva as equações:

a) $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2}$

b) $\sqrt[10]{(1+x)^2} - \sqrt[10]{(1-x)^2} = \sqrt[10]{1-x^2}$

c) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$

d) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

e) $\sqrt{x-4a+16} = 2\sqrt{x-2a+4} - \sqrt{x}$

f) $\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$

g) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}$

h) $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$

i) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$

j) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$

k) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}} + \sqrt{5-\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}$

l) $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$

m) $x\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15} = 2$

n) $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{x^2-3x+2}$

o) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$

p) $\sqrt[4]{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}} - \sqrt[4]{84-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}} = 0$

q) $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} - \sqrt[5]{(x-1)(x-33)} = 1$

**Sistemas de equação não lineares**

**1)** (CM BH-15) Sobre o sistema de equações $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 10 \\ \dfrac{xz}{x+z} = 20 \\ \dfrac{yz}{y+z} = 10 \end{cases}$, pode-se afirmar que o valor de x é:

a) um número primo.
b) o menor múltiplo comum entre 10 e 20.
c) um número múltiplo de 8.
d) um número divisor de 100.
e) um número irracional.

**2)** (CM RJ-07) O valor da razão $\dfrac{x}{y}$ na solução do sistema

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 70 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 203 \end{cases}$$

considerando $x < y$, é:

A) 0,20 B) 0,25 C) 0,30 D) 0,35 E) 0,40

**3)** (FGV-09) Sejam x, y e z números reais positivos que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 4 \\ y + \dfrac{1}{z} = 1 \\ z + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Calcule a solução (x, y, z) desse sistema.

**4)** (Colégio Naval-18) Sobre o sistema $\begin{cases} \sqrt[5]{y} + x^{-3} = \dfrac{3}{5} \\ y^{2/5} - (x^{-2})^3 = \dfrac{4}{25} \end{cases}$ pode-se afirmar que o valor de

a) $y^2$ é $\dfrac{169}{900}$. b) $x^4$ é $\dfrac{13}{30}$. c) x é $\sqrt[3]{3}$. d) y é zero. e) $x^3$ é 6.

**5)** (Colégio Naval-78) O sistema $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{8} \\ xy = 16 \end{cases}$ admite para x e y valores positivos cuja soma é:

(A) 6 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

**6)** (Colégio Naval-80) Sendo x e y números positivos e x maior do que y, que satisfazem o sistema $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5 \\ \sqrt{x^2 - y^2} = 6 \end{cases}$ vamos ter $x^2 + y^2$ igual a :

(A) 48,5 (B) 42 (C) 40,5 (D) 45 (E) 45,5

**7)** (Colégio Naval-82) Se $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 2$, $\frac{x^2z^2}{x^2+z^2} = 3$ e $\frac{y^2z^2}{y^2+z^2} = x$. O produto dos valores de x nesse sistema é:

a) – 1,5 c) – 3, 2 e) 3,4 b) – 2,4 d) 2,5

**8)** (Colégio Naval-87) O valor de x no sistema $\begin{cases} 16x - y = 1 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt[4]{x+33} = 1 \end{cases}$ é:

(A) $15 + 14\sqrt{2}$ (B) $15 + 12\sqrt{2}$ (C) $15 + 10\sqrt{2}$
(D) $15 + 8\sqrt{2}$ (E) $15 + 6\sqrt{2}$

**9)** (Colégio Naval-89) Sobre o sistema $\begin{cases} x^{-2} + \sqrt[4]{y} = \frac{7}{6} \\ x^{-4} - \sqrt{y} = \frac{7}{36} \end{cases}$ pode-se afirmar que:

(A) é impossível (B) é indeterminado (C) $x = \frac{1}{2}$

(D) $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (E) $y = \frac{1}{16}$

**10)** (Colégio Naval-93) A soma dos valores de y que pertencem ao conjunto-solução do sistema $\begin{cases} xy^2 - x^2 = 8x \\ y + 2x = 5 \end{cases}$ é:

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{13}{2}$ (C) $\frac{23}{2}$ (D) $\frac{9}{2}$ (E) infinita

11) (Colégio Naval-11) No sistema $\begin{cases} 3x - y.\sqrt{3} = 0 \\ x^2.y^{-2} = \frac{1}{3} \end{cases}$. a quantidade de solução inteiras para 'x' e 'y' é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) infinita

12) (EPCAr-02) Se $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3xy + y^2 = 63 \end{cases}$, então xy é igual a

a) 18 b) 9 c) –9 d) –18

13) (IME-71) Resolva o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x+2y} - \frac{1}{x+2y-1} = 0 \\ \frac{1}{\frac{1}{1-x+2y} - \frac{1}{1-x-2y}} = 2 \end{cases}$$

14) (IME-71) Resolva o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x^{1/4} + y^{1/5} = 3 \\ x^{1/2} + y^{2/5} = 5 \end{cases}$$

15) (IME-89) Resolva o sistema: $\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$

16) (Colégio Naval-18) Sabendo que $5^k = 561 + 2^{2n}$ e $5^{\frac{k}{2}} = 17 + 2^n$, o valor de $\frac{p^k - k^n}{p^k + k^n}$ é igual a

a) $\frac{7}{11}$ b) $\frac{19}{35}$ c) $\frac{17}{145}$ d) $\frac{11}{127}$ e) $\frac{13}{368}$

17) (OBM-02) Os valores de $x, y$ e $z$ que satisfazem às equações $x + \frac{1}{y} = 5$, $y + \frac{1}{z} = 1$ e $z + \frac{1}{x} = 2$ são tais que $x + 3y + 2z$ é igual a:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**18)** (OBM-06) Quantos ternos de números reais $x, y, z$ satisfazem o sistema abaixo?

$$\begin{cases} x(x+y+z) = 2005 \\ y(x+y+z) = 2006 \\ z(x+y+z) = 2007 \end{cases}$$

A) Nenhum B) 1 C) 2 D) 3 E) 2006

**19)** (OBM-09) Resolva, em números reais, o sistema $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \\ xyz = 1 \end{cases}$.

**20)** (Olimpíada do Canadá-96) Determine todas as soluções reais do seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

Dica: some das 3 equações e depois monte quadrados perfeitos

**21)** (Olimpíada Ibero-Americana-91) Determinar todos os números reais que satisfazem o sistema de equações $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1 \end{cases}$

**22)** (Olimpíada Purple Comet-10) Resolva, no campo dos números reais, o sistema de equações $\begin{cases} (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = 2(y^3 - 2\sqrt{5} - 1) \\ (y^2 + y - 1)(y^2 - y + 1) = 2(x^3 + 2\sqrt{5} - 1) \end{cases}$

Dica: some as duas equações

**23)** (Olimpíada de San Diego-19) Para o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525 \\ x + xy + xy^2 = 35 \end{cases},$$

a soma dos valores reais de y que satisfazem as equações é:

a) 2 b) 5/2 c) 5 d) 20 e) 55/2

**24)** (Olimpíada da Noruega-15) Determine todas as triplas (x, y, z) de reais satisfazendo as equações $\begin{cases} x^2+4y^2=4zx \\ y^2+4z^2=4xy \\ z^2+4x^2=4yz \end{cases}$.

Dica: some as 3 equações

**25)** (Olimpíada Baltic Way-93) Resolva o sistema de equações no campo dos números reais $\begin{cases} x^5=y+y^5 \\ y^5=z+z^5 \\ z^5=t+t^5 \\ t^5=x+x^5 \end{cases}$.

Dica: some as 4 equações e depois discuta os sinais das variáveis

**26)** (Olimpíada Baltic Way-99) Determine todos os números reais a, b, c, d que satisfazem as seguintes equações

$$\begin{cases} abc+ab+bc+ca+a+b+c=1 \\ bcd+bc+cd+db+b+c+d=9 \\ cda+cd+da+ac+c+d+a=9 \\ dab+da+ab+bd+d+a+b=9 \end{cases}.$$

Dica: soma 1 aos membros esquerdos de cada equação e depois fatore

**27)** (Canadian Correspondence Program-08) Determine todos os pares reais (x, y) que satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2y^5}=4(y^2-x^2) \\ 5\sqrt[3]{x^4y}=y^2+x^2 \end{cases}$$

Dica: Multiplique as duas equações

**28)** (OBM-97) O número de pares (x, y) de reais que satisfazem o sistema de equações $\begin{cases} x^2-xy-y^2+1=0 \\ x^3-x^2y-xy^2+x-y+2=0 \end{cases}$ é igual a:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**29)** (Olimpíada do Rio de Janeiro-18) Sejam x, y e z números reais positivos tais que:

$$a=\frac{xy}{x+y},\quad b=\frac{xz}{x+z},\quad c=\frac{yz}{y+z}.$$

Calcule x em função de a, b e c.

**30)** (Olimpíada da Áustria-02) Resolva o seguinte sistema de equações no conjunto dos números reais:

$$\begin{cases} 2x_1 = x_5^2 - 23 \\ 4x_2 = x_1^2 + 7 \\ 6x_3 = x_2^2 + 14 \\ 8x_4 = x_3^2 + 23 \\ 10x_5 = x_4^2 + 34 \end{cases}.$$

Dica: some todas as equações e monte quadrados perfeitos

**31)** (Canadian Open Challenge-97) Determine todos os números reais x, y e z tais que

$$x-\sqrt{yz}=42$$
$$y-\sqrt{xz}=6$$
$$z-\sqrt{xy}=-30$$

**32)** (Canadian Open Challenge-05) Determine todas as triplas ordenadas (x, y, z) tais que

$$x^2 - yz + xy + zx = 82$$
$$y^2 - zx + xy + yz = -18$$
$$z^2 - xy + zx + yz = 18$$

**33)** Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2} \\ x + yx + y = 9 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y+1}{x-y}} + 2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 3 \\ x + xy + y = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y^2 + \sqrt{3y^2 - 2x + 3} = \frac{2}{3}x + 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x^3+y^3=5a^3 \\ x^2y+xy^2=a^3 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y) \\ x^3+y^3=7(x+y) \end{cases}$;

i) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^4+y^4=7 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x^2+y^2-z^2=37 \\ x^3+y^3-z^3=1 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=2 \\ \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{6}{5} \\ \dfrac{xyz}{z+x}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$;

l) $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases}$;

m) $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1 \\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5 \end{cases}$;

n) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2 \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1 \end{cases}$;

o) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$;

p) $\begin{cases} x^3-y^3=26 \\ x^4-y^4=20(x+y) \end{cases}$;

q) $\begin{cases} \dfrac{yz}{x}=\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{zx}{y}=\dfrac{15}{2} \\ \dfrac{xy}{z}=\dfrac{6}{5} \end{cases}$;

r) $\begin{cases} x+y+z=13 \\ x^2+y^2+z^2=91 \\ y^2=xz \end{cases}$;

s) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=3 \\ \dfrac{1}{xyz}=1 \end{cases}$;

t) $\begin{cases} x^2+4xy-2y^2=5(x+y) \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y) \end{cases}$;

u) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x(y+z)=5 \\ y(x+z)=8 \end{cases}$.

# INEQUAÇÕES

## 9.1. INEQUAÇÕES: DESIGUALDADE E INEQUAÇÃO

### 9.1.1. Conceitos

**Desigualdade**: Entende-se por desigualdade qualquer expressão algébrica que possa ser expressa de uma das maneiras $P > Q$, $P < Q$, $P \geq Q$ ou $P \leq Q$, válida para todos os valores pertencentes aos respectivos domínios de P e Q. Por exemplo, pode-se demonstrar que $x^2 + 1 \geq 2x$, para qualquer valor real de x. Algumas desigualdades são bastante conhecidas como, por exemplo, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

"Se $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ são números positivos então $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$, com a igualdade valendo somente se $a_1 = a_2 = ... = a_n$."

**Inequação**: Entende-se por inequação qualquer expressão algébrica que possa ser expressa de uma das maneiras $P > Q$, $P < Q$, $P \geq Q$ ou $P \leq Q$, válida para um subconjunto dos valores pertencentes aos respectivos domínios de P e Q. Por exemplo, considere a expressão algébrica $P = x^2 - 5x + 6$, onde x pode assumir qualquer valor real. Pode-se demonstrar que a inequação $x^2 - 5x + 6 < 0$ é válida somente para os valores reais de x tais que $2 < x < 3$, que é subconjunto dos números reais.

Resolver uma inequação significa encontrar para quais valores das variáveis envolvidas a inequação é satisfeita. Por exemplo, é conhecido que o conjunto solução da inequação $x^3 \geq 0$ é $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$. Por outro lado, pode-se demonstrar que não existe número real x tal que $x^2 - x + 1 \leq 0$. Neste caso, afirma-se que o conjunto solução da inequação é o conjunto vazio ou que a inequação não possui solução real. Note também que qualquer subconjunto do conjunto solução também satisfaz a inequação. Por exemplo, pode-se demonstrar que o conjunto solução da inequação $\frac{x+1}{x-3} \leq 0$ é formado pelos números reais x tais que $-1 < x \leq 3$. Desta forma, qualquer número real no intervalo [0, 2] também satisfaz a inequação, uma vez que $[0, 2] \subset ]-1, 3]$. Por exemplo, substituindo o número real $x = 1$ na expressão obtém-se $\frac{1+1}{1-3} = -1 \leq 0$, que é verdade, fazendo com que $x = 1$ pertença ao conjunto solução da inequação $\frac{x+1}{x-3} \leq 0$, entretanto $x = 1$ não representa todas as soluções possíveis para esta inequação.

**Inequações Equivalentes**: Duas inequações são denominadas equivalentes se e somente se possuem o mesmo conjunto solução. Por exemplo, as inequações $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geq 0$ e $\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \geq 0$ podem ser classificadas como equivalentes pois ambas possuem como conjunto solução $S = \{x \in IR / x \geq 1\}$.

## 9.2. OPERAÇÕES

As seguintes operações descritas abaixo, quando aplicadas a uma determinada inequação, transformam-na em outra inequação equivalente.

### 9.2.1. Somar ou subtrair aos dois membros da inequação o mesmo número real ou a mesma expressão algébrica

Em linguajar matemático, as inequações $P \geq Q$ e $P + H \geq Q + H$ possuem o mesmo conjunto solução, onde P, Q e H são expressões algébricas. Por exemplo, se aos membros esquerdo e direito da inequação $x^2 + 2x + 1 < 5x - 2$ é subtraída a expressões algébrica $x^2 + 1$ (obtendo-se assim a inequação $2x < -x^2 + 5x - 3$), o conjunto solução da inequação não é alterado.

Esta operação é muito útil quando se deseja que todos os termos da inequação fiquem somente em um dos membros (geralmente o esquerdo) da inequação. Por exemplo, na inequação $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7x + 2 \geq -x^3 + 2x - 1$, para que todos os termos algébricos fiquem no membro esquerdo, basta somar aos dois membros da inequação a expressão $x^3 - 2x + 1$:

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7x + 2 \geq -x^3 + 2x - 1 \Leftrightarrow$$
$$(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7x + 2) + (x^3 - 2x + 1) \geq (-x^3 + 2x - 1) + (x^3 - 2x + 1) \Leftrightarrow$$
$$x^4 - x^3 + 4x^2 - 9x + 3 \geq 0$$

**Observação:** Esta propriedade nada mais é do que uma maneira disfarçada de aplicar em uma inequação uma conhecida propriedade das equações, vulgarmente denominada de **"passar um termo para o outro membro invertendo o sinal"**. Por exemplo, somar $-x^2$ nos dois membros da inequação $2 - x \geq x^2$ é equivalente a passar o termo $x^2$ do membro direito para o membro esquerdo invertendo o sinal, obtendo assim $-x^2 - x + 2 \geq 0$.

### 9.2.2. Multiplicar ou dividir os dois membros da inequação pelo mesmo número real não nulo

Para uma melhor análise desta operação é necessário separar em dois casos:

i) o número pelo qual está sendo multiplicada ou dividida a inequação é positivo

Neste caso, o sinal da inequação é mantido. Por exemplo, sendo $k \in IR_+^*$, as inequações $P < Q$ e $k.P < k.Q$ possuem o mesmo conjunto solução.

Esta operação é muito útil na resolução de inequações de 1° grau. Por exemplo, tome a inequação $2x \geq 8$. Dividindo os dois membros por 2 obtemos $\frac{2x}{2} \geq \frac{8}{2}$, que implica em $x \geq 4$.

ii) o número pelo qual está sendo multiplicada ou dividida a inequação é negativo

Se o sinal do número ao qual a inequação é multiplicada ou dividida for negativo o sinal da inequação é invertido. Por exemplo, se $k \in \mathbb{R}_-^*$, então a inequação $P > Q$ possui o mesmo conjunto solução da inequação $-k.P < -k.Q$.

Esta operação pode ser aplicada, por exemplo, para resolver a inequação $-\frac{x}{5} > 3$. Multiplicando os dois membros por $-5$ obtém-se:

$$\left(-\frac{x}{5}\right)(-5) < (3)(-5) \quad \Rightarrow \quad x < -15$$

**9.2.3. Trocar os lados da inequação (escrever o lado esquerdo no direito e vice versa), invertendo o sinal de desigualdade**

Esta operação pode ser representada pelos esquemas abaixo:

$$P > Q \Leftrightarrow Q < P$$
$$P \geq Q \Leftrightarrow Q \leq P$$
$$P < Q \Leftrightarrow Q > P$$
$$P \leq Q \Leftrightarrow Q \geq P$$

A demonstração é bastante simples. Tome como exemplo o 1° caso, em que $P > Q$. Subtraindo os dois lados por $P + Q$ obtém-se:

$$P - (P + Q) > Q - (P + Q) \Leftrightarrow -Q > -P.$$

Multiplicando os dois membros por $-1$ obtém-se $Q < P$.

Na verdade perceba que não é necessário apelar para a álgebra para demonstrar a aplicação das operações acima. Por exemplo, se P é maior do que Q, é óbvio que Q é menor do que P. As demais situações também pode ser demonstradas de maneira análoga.

Pode-se aplicar esta operação para resolver a inequação

$$(4 - x) + (x - 8) < (2 + x) + (x - 2).$$

Reduzindo cada membro obtém-se: $-4 < 2x$.

Dividindo os dois membros por 2: $-2 < x$.

Finalmente, trocando os lados (invertendo o sinal de desigualdade) da inequação: $x > -2$

### 9.2.4. Elevar os dois membros da inequação à mesma potência ímpar

O conjunto solução de uma inequação não é alterado quando os dois membros de uma inequação são elevados um número inteiro positivo ímpar.

$P > Q \Leftrightarrow P^n > Q^n$, n = 1, 3, 5, 7, ...
$P \geq Q \Leftrightarrow P^n \geq Q^n$, n = 1, 3, 5, 7, ...
$P < Q \Leftrightarrow P^n < Q^n$, n = 1, 3, 5, 7, ...
$P \leq Q \Leftrightarrow P^n \leq Q^n$, n = 1, 3, 5, 7, ...

Esta operação, aplicada à inequação $\sqrt[3]{x-2} \leq 1$, produz uma solução bastante sintética. Elevando os dois membros ao cubo:

$$\sqrt[3]{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3 \leq (1)^3 \Leftrightarrow x-2 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 3$$

**Observação:** Esta propriedade não é válida se o expoente for um número par. Por exemplo, elevando os dois membros da inequação $x < 3$ ao quadrado obtém-se $x^2 < 9$, cujo conjunto solução é $-3 < x < 3$, diferente do conjunto solução da inequação original. Entretanto, em algumas inequações que possuem raízes quadradas em suas expressões algébricas é praticamente obrigatório elevar ao quadrado. Neste caso, deve-se fazer a interseção do conjunto solução encontrado com o domínio da variável da inequação. Por exemplo, na inequação $\sqrt{x-1} < 2$, pelo fato de existir uma raiz quadrada, o domínio da inequação é composto pelos valores tais $x - 1 \geq 0$, que equivale a $x \geq 1$. Elevando-se dois membros da inequação ao quadrado encontra-se $x - 1 < 4$, implicando em $x < 5$. Fazendo a interseção do conjunto solução com o domínio da inequação encontra-se o intervalo $1 \leq x < 5$. Em resumo, não é proibido elevar uma inequação a um expoente par, porém deve-se avaliar como a inequação é alterada devido a essa exponenciação e verificar como isso interfere no conjunto solução encontrado.

### 9.2.5. Elevar os dois membros da inequação ao número – 1.

Nesta situação, caso as expressões nos dois membros da inequação tenham mesmo sinal, o sinal de desigualdades deve ser invertido. Os esquemas abaixo representam a aplicação desta propriedade:

$P > Q \Leftrightarrow \frac{1}{P} < \frac{1}{Q}$, caso $P.Q > 0$ $\qquad$ $P < Q \Leftrightarrow \frac{1}{P} > \frac{1}{Q}$, caso $P.Q > 0$

$P \geq Q \Leftrightarrow \frac{1}{P} \leq \frac{1}{Q}$, caso $P.Q > 0$ $\qquad$ $P \leq Q \Leftrightarrow \frac{1}{P} \geq \frac{1}{Q}$, caso $P.Q > 0$

Por exemplo, aplicando esta operação na inequação $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{4}$ obtém-se:

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2,\ x \neq 0$$

**Observações:**

(1) Perceba que sempre é necessário analisar os números que zeram o denominador das expressões algébricas envolvidas na inequação. No último exemplo, é evidente que $x = 0$ é raiz do denominador de $\frac{1}{x^2}$, implicando que $x = 0$ não possa pertencer ao conjunto solução da inequação.

(2) Há quatro formas clássicas de escrever o conjunto solução de $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{4}$:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 2,\ x \neq 0\} \text{ ou } S = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 0 \text{ e } 0 < x < 2\} \text{ ou}$$
$$S = ]-2, 0[ \cup ]0, 2[ \text{ ou } S = ]-2, 2[ - \{0\}$$

(3) É necessário ter muito cuidado com o estudo dos sinais das expressões em lados opostos da inequação antes de elevar a $-1$. No exemplo apresentado isso não foi necessário pois $x^2$ nunca é negativo. Entretanto, caso a expressão em um membro da desigualdade assuma valores positivos e a expressão no outro membro assuma valores negativos, é necessário separar a análise em casos, uma vez que um número positivo sempre é maior que qualquer número negativo.

## Exercícios Resolvidos

**1)** (IME-09) Sejam r, s, t e v números inteiros positivos tais que $\frac{r}{s} < \frac{t}{v}$. Considere as seguintes relações:

i. $\frac{r+s}{s} < \frac{t+v}{v}$

ii. $\frac{r}{r+s} < \frac{t}{t+v}$

iii. $\frac{r}{s} < \frac{r+t}{s+v}$

iv. $\frac{r+t}{s} < \frac{r+t}{v}$

**Solução: Alternativa D**

I. Separando as frações em somas parciais:

$\frac{r+s}{s} < \frac{t+v}{v} \Leftrightarrow \frac{r}{s}+1 < \frac{t}{v}+1 \Leftrightarrow \frac{r}{s} < \frac{t}{v}$ (Verdadeiro)

II. Elevando a inequação proposta à $-1$:

$\frac{r}{r+s} < \frac{t}{t+v} \Leftrightarrow \frac{r+s}{r} > \frac{t+v}{t} \Leftrightarrow 1+\frac{s}{r} > 1+\frac{v}{t} \Leftrightarrow \frac{s}{r} > \frac{v}{t} \Leftrightarrow \frac{r}{s} < \frac{t}{v}$

(Verdadeiro)

III. Como os números envolvidos são todos positivos pode-se multiplicar cruzado:

$\frac{r}{s} < \frac{r+t}{s+v} \Leftrightarrow rs + rv < rs + st \Leftrightarrow rv < st \Leftrightarrow \frac{r}{s} < \frac{t}{v}$ (Verdadeiro)

IV. Desde que os números envolvidos são positivos conclui-se que:

$\frac{r+t}{s} < \frac{r+t}{v} \Leftrightarrow s > v$ (Falso)

2) (International Mathematical Talent Search) Baseado apenas em $1 < \sqrt{3} < 2$, deduza que $6 < 3^{\sqrt{3}} < 7$.

**Solução:**

O objetivo desta questão é, utilizando apenas as operações permitidas às inequações, sem apelar para aproximações de números irracionais, deduzir que $6 < 3^{\sqrt{3}} < 7$.

Vamos iniciar de uma estimativa bastante simples, que é $\sqrt{3} < 2$.

$$\sqrt{3} < 2 \Rightarrow \sqrt{3}+1 < 3 \Rightarrow 2^{\sqrt{3}+1} < 2^3 = 8 < 9 = 3^2 \Rightarrow 2 < \left(3^2\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}+1}} \Rightarrow$$

$$2 < 3^{\sqrt{3}-1} \Rightarrow 2.3 < 3^{\sqrt{3}-1}.3 \Rightarrow 6 < 3^{\sqrt{3}} \quad (1)$$

Perceba que acabamos de demonstrar metade do resultado pedido.

Multiplicando os dois lados de (1) por 3:

$$18 < 3^{\sqrt{3}-1} \Rightarrow 16 < 3^{\sqrt{3}+1} \Rightarrow 4^2 < 3^{\sqrt{3}+1} \Rightarrow (4^2)^{\frac{1}{\sqrt{3}+1}} < 3 \Rightarrow$$

$$4^{\sqrt{3}-1} < 3 \Rightarrow 4.4^{\sqrt{3}-1} < 4.3 \Rightarrow 4^{\sqrt{3}} < 12 \Rightarrow 4^{\sqrt{3}} < \frac{49}{4} \Rightarrow$$

$$4^{\sqrt{3}+1} < 7^2 \Rightarrow 4 < \left(7^2\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}+1}} \Rightarrow 4 < 7^{\sqrt{3}-1} \Rightarrow 7.4 < 7.7^{\sqrt{3}-1} \Rightarrow$$

$$28 < 7^{\sqrt{3}} \Rightarrow 27 < 7^{\sqrt{3}} \Rightarrow 3^3 < 7^{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(3^3\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} < \left(7^{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow 3^{\sqrt{3}} < 7 \quad (2)$$

Fazendo a interseção entre os resultados (1) e (2) segue que $6 < 3^{\sqrt{3}} < 7$.

## 9.3. INEQUAÇÕES DO 1° GRAU

Uma inequação é classificada como sendo de 1° grau se todas as expressões algébricas envolvidas na inequação são polinômios e o maior dos graus destes polinômios é 1. Por exemplo, a inequação $2x + 1 \leq 3x - 8$ é uma inequação do 1° grau, uma vez que os polinômios pertencentes à inequação são do 1° grau. Do mesmo modo, $4 > 3 - 5x$ também é uma inequação do 1° grau, pois a expressão algébrica do membro esquerdo possui grau zero, enquanto que a do membro direito possui grau 1.

### 9.3.1. Determinação do conjunto solução

O método para a determinação do conjunto solução de uma inequação do 1° grau é bastante semelhante ao método para a resolução de uma equação do 1° grau, onde, aplicando seguidas vezes as operações permitidas em uma inequação, as expressões algébricas envolvendo a variável devem ser escritas no membro esquerdo da desigualdade, enquanto que os termos independentes da variável (números) devem ser escritos no membro direito. O desenvolvimento abaixo, usando o sinal de desigualdade maior (>) exemplifica todos os casos de resolução de inequações de 1° grau:

$$ax + b > cx + d \Rightarrow ax - cx > d - b \Rightarrow (a - c)x > d - b$$

i) Se $a - c > 0$ então os dois membros da inequação final devem ser divididos por $a - c$ e esta divisão mantém o sinal de desigualdade, obtendo-se assim o conjunto solução $x > \dfrac{d-b}{a-c}$

ii) Se $a - c < 0$ então os dois membros da inequação final devem ser divididos por $a - c$ e esta divisão inverte o sinal de desigualdade, obtendo-se assim o conjunto solução $x < \dfrac{d-b}{a-c}$

iii) Se $a - c = 0$ e $d - b > 0$ a inequação é válida para qualquer valor real de x. O conjunto solução é o conjunto dos números reais.

iv) Se $a - c = 0$ e $d - b \leq 0$ a inequação não é válida para nenhum valor real de x. O conjunto solução é vazio.

Observe os exemplos abaixo:

1) $2x - 1 \leq 4x - 9 \Rightarrow 2x - 4x \leq -9 + 1 \Rightarrow -2x \leq -8$
Dividindo os dois membros por $-2$ obtém-se $x \geq 4$.

Assim, o conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$

2) $9 < 3 - 2x \Rightarrow 2x < 3 - 9 \Rightarrow 2x < -6$
Dividindo os dois membros por 2 obtém-se $x < -3$.
Conjunto solução: $S = \{x \in \mathbb{R} / x < -3\}$

3) $3x + 5 \geq (x + 1) + (2x - 7) \Rightarrow 3x + 5 \geq 3x - 6 \Rightarrow 3x - 3x \geq -6 - 5 \Rightarrow 0 \geq -11$
Note que esta última desigualdade é válida para qualquer x real. Logo, o conjunto solução desta inequação é $S = \{x \in \mathbb{R}\}$

4) $-x + 3 > (2x + 1) - (3x - 6) \Rightarrow -x + 3 > -x + 7 \Rightarrow -x + x > 7 - 3 \Rightarrow 0 > 4$
Obviamente esta última desigualdade nunca é válida, independentemente do valor de x. Assim, o conjunto solução é vazio: $S = \varnothing$.

## Exercícios Resolvidos

1) (UERGS-08) A soma dos números inteiros positivos que satisfazem a inequação $1 - 2x > -7$ vale
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7
**Solução: Alternativa D**
$1 - 2x > -7 \Rightarrow -2x > -7 - 1 \Rightarrow -2x > -8 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$
Os número inteiros positivos menores que 4 são 1, 2 e 3, cuja soma é 6.

2) (EPCAr-00) O conjunto solução da inequação $-3x + a > 7$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. Então, tem-se necessariamente que a é um número real
a) primo
b) menor que 2
c) par menor que 10
d) impar maior que 10
**Solução: Alternativa B**
$-3x + a > 7 \Rightarrow -3x > 7 - a \Rightarrow x < \dfrac{7 - a}{3}$
Assim, tem-se que $\dfrac{7 - a}{3} = 2 \Rightarrow 7 - a = 6 \Rightarrow a = 1$
Logo, a única alternativa correta é a B.

3) Resolver a inequação $\dfrac{3\left(5 - \dfrac{x}{2}\right)}{2} + \dfrac{4(3x - 1)}{3} < \dfrac{7 - x}{4} - 2$, onde $x \in \mathbb{R}$.

**Solução:**

$$\frac{3\left(5-\frac{x}{2}\right)}{2}+\frac{4(3x-1)}{3}<\frac{7-x}{4}-2 \Rightarrow \frac{3\left(\frac{10-x}{2}\right)}{2}+\frac{4(3x-1)}{3}<\frac{7-x-8}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{3(10-x)}{4}+\frac{4(3x-1)}{3}<\frac{-x-1}{4} \Rightarrow \frac{3(10-x)}{4}+\frac{4(3x-1)}{3}+\frac{x+1}{4}<0$$

Multiplicando ambos os lados da inequação por 12:

$$9(10-x)+16(3x-1)+3(x+1)<0 \Rightarrow 90-9x+48x-16+3x+3<0 \Rightarrow$$

$$42x+77<0 \Rightarrow 42x<-77 \Rightarrow x<-\frac{77}{42} \Rightarrow x<-\frac{11}{6}$$

4) (Unesp-00) Duas pequenas fábricas de calçados, A e B, tem fabricado, respectivamente, 3000 e 1100 pares de sapatos por mês. Se a partir de janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica B superará a produção da fábrica A a partir de:

a) março. b) maio. c) julho. d) setembro. e) novembro

**Solução: Alternativa D**

Se x é o número de meses, a partir de janeiro, então as expressões que fornecem a produção das fábricas A e B são dadas por $y_A = 3000 + 70x$ e $y_B = 1100 + 290x$.

A produção de B será maior que a de A quando $y_B > y_A$:

$1100 + 290x > 3000 + 70x \Rightarrow 290x - 70x > 1900 \Rightarrow 220x > 1900 \Rightarrow$

$x > 8,636363...$

Como x deve ser um número inteiro, tem-se que o menor valor de x é 9.

Logo, a partir de setembro a produção da fábrica B superará a da fábrica A.

## 9.4. SISTEMA DE INEQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

**9.4.1. Definição:** Para que um sistema de inequações seja classificado como sendo do 1º grau e com uma incógnita, basta que todas as expressões algébricas de cada uma das inequações sejam do 1º grau e que uma mesma variável apareça em cada uma das inequações. Por exemplo, o sistema seguinte pode ser classificado como sendo do 1º grau e de uma incógnita:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 6x + 9 \\ 5x + 8 \leq 3 \\ 3x \geq x - 20 \end{cases}$$

**9.3.2. Determinação do conjunto solução**

Um sistema de inequações é resolvido da seguinte maneira:

1) Inicialmente deve-se determinar o intervalo que é o conjunto solução de cada uma das inequações;

2) Depois basta identificar os números ou intervalos que pertencem simultaneamente a cada um dos conjuntos soluções já determinados.

Em outras palavras, o conjunto solução de um sistema de equações do 1º grau é igual à interseção dos conjuntos soluções de cada uma das inequações que compõe o sistema. Eventualmente, caso não exista intervalo ou número real que pertença simultaneamente a todos os conjuntos soluções das inequações do sistema, pode ocorrer do conjunto solução do sistema ser o conjunto vazio.

Observe a resolução do exemplo seguinte para entender melhor como resolver um sistema de inequações do 1º grau:

### Exercícios Resolvidos

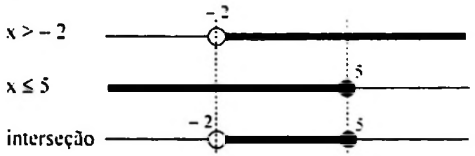
1) Resolva o sistema de inequações do 1º grau: $\begin{cases} 3x - 1 > x - 5 \\ 4x + 7 \geq 5x + 2 \end{cases}$.

**Solução:**

i) $3x - 1 > x - 5 \Rightarrow 3x - x > 1 - 5 \Rightarrow 2x > -4 \Rightarrow x > -2$

ii) $4x + 7 \geq 5x + 2 \Rightarrow 4x - 5x \geq 2 - 7 \Rightarrow -x \geq -5 \Rightarrow x \leq 5$

Fazendo a interseção dos intervalos:



Assim, o conjunto solução do sistema de inequações do 1° grau é dado pelo conjunto dos números reais x tais que $-2 < x \leq 5$.

**2)** (EPCAr-05) Para que o número x satisfaça simultaneamente as desigualdades $3x + 2 < 7 - 2x$, $48x \leq 3x + 10$ e $11 - 2(x - 3) > 1 - 3(x - 5)$ é suficiente que

a) $-1 < x < \frac{2}{9}$ b) $\frac{2}{9} \leq x < 1$ c) $-1 < x < 1$ d) $-1 < x \leq \frac{2}{9}$

**Solução: Alternativa E**

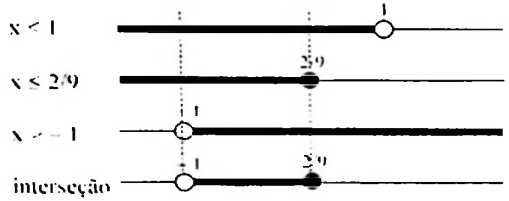
Inicialmente vamos determinar o intervalo que é solução de cada uma das inequações de 1° grau que compõe o sistema:

i) $3x + 2 < 7 - 2x \Rightarrow 3x + 2x < 7 - 2 \Rightarrow 5x < 5 \Rightarrow x < 1$

ii) $48x \leq 3x + 10 \Rightarrow 48x - 3x \leq 10 \Rightarrow 45x \leq 10 \Rightarrow x \leq 2/9$

iii) $11 - 2(x - 3) > 1 - 3(x - 5) \Rightarrow 11 - 2x + 6 > 1 - 3x + 15 \Rightarrow$
$-2x + 3x > 16 - 17 \Rightarrow x > -1$

Fazendo a interseção dos intervalos tem-se:




Desta maneira, o conjunto solução do sistema é $-1 < x \leq 2/9$, alternativa E.

## 9.5. SISTEMA DE DUAS INEQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

### 9.5.1. Definições

**9.5.1.1. Inequação com duas incógnitas:** Uma inequação do 1º grau com duas incógnitas é toda inequação que pode ser escrita de uma das maneiras $P > Q$, $P < Q$, $P \geq Q$ ou $P \leq Q$, em que as expressões algébricas P e Q apresentam, no máximo, as mesmas duas incógnitas (variáveis). Por exemplo, a inequação $x - 2y + 5 > 3x + 8$ é um exemplo de inequação do 1º grau com duas incógnitas.

**9.5.1.2. Sistema de duas inequações do 1º grau com duas incógnitas:**
Um sistema de inequações com duas incógnitas é todo sistema composto de duas inequações de 1º grau, cada uma contendo as mesmas duas variáveis. Por exemplo, o sistema de inequações $\begin{cases} 4x - 7y + 4 \leq 2x + 9y + 1 \\ 5x + y + 3 > -11x + 5y \end{cases}$ é classificado como sendo do 1º grau com duas incógnitas.

### 9.5.2. Resolução

O método de resolução de um sistema de inequações do 1º grau com duas incógnitas será apresentado no volume 1 desta coleção, no capítulo de funções, mas especificamente no tópico que trata das funções do 1º grau.

## 9.6. INEQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

### 9.6.1. Definição:

Uma inequação é classificada como sendo do 2º grau se todas as expressões algébricas envolvidas na inequação são polinômios e o maior grau destes polinômios é 2. Por exemplo, são inequações do 2º grau:

$$x^2 + 3x - 5 \geq 5x - 4,\ 9 < x^2 \text{ e } x^2 - 9x + 8 \leq 2x^2 + 7x - 6.$$

### 9.6.2. Determinação do conjunto solução:

Abaixo será descrito o método geral para a resolução de uma inequação do 2º grau. Apesar da inequação do exemplo possuir o sinal de maior (>), o procedimento a seguir vale para qualquer sinal de desigualdade (>, <, ≥ ou ≤). Considere duas expressões algébricas do 2º grau $P = dx^2 + ex + f$ $(d \neq )$ e $Q = gx^2 + hx + i$ $(g \neq 0)$. Vamos agora analisar como determinar o conjunto dos números reais x de modo que $P > Q$:

$$dx^2 + ex + f > gx^2 + hx + i \Rightarrow (d - g)x^2 + (e - h)x + f - i > 0$$

Suponha que a = d – g, b = e – h e c = f – i , assim a inequação fica da forma $ax^2 + bx + c > 0$. O estudo do sinal da expressão $ax^2 + bx + c$ depende fundamentalmente do estudo das raízes da equação de 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, e o estudo das raízes depende da análise do discriminante da equação:

i) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: a equação de 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais e distintas.

Supondo que r e s sejam estas raízes reais distintas (com r < s), pode-se fatorar a equação dada na forma: $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$

Analisando o sinal da multiplicação (x – r)(x – s) pode-se enunciar que:

- Se x – r e x – s tiverem o mesmo sinal (ambos positivos ou ambos negativos), a multiplicação destes dois elementos será positiva. Isto ocorre se x não pertencer ao intervalo ]r, s[, ou seja, se x < r ou x > s.
- Se x – r e x – s tiverem sinais contrários (um deles positivo e o outro negativo), a multiplicação destes dois elementos será negativa. Isto ocorre se x pertencer ao intervalo [r, s], ou seja, se r < x < s.

Desta maneira, há quatro casos a considerar:

1) se a > 0 então $ax^2 + bx + c > 0$ se x < r ou x > s, onde r e s são as raízes reais de $ax^2 + bx + c = 0$.

2) se a > 0 então $ax^2 + bx + c < 0$ se r < x < s, onde r e s são as raízes reais de $ax^2 + bx + c = 0$.

3) se a < 0 então $ax^2 + bx + c > 0$ se r < x < s, onde r e s são as raízes reais de $ax^2 + bx + c = 0$.

4) se a < 0 então $ax^2 + bx + c < 0$ se x < r ou x > s, onde r e s são as raízes reais de $ax^2 + bx + c = 0$.

ii) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: a equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais iguais.

Supondo que r seja esta raiz real, então a expressão de 2° grau $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorada na forma $ax^2 + bx + c = a(x - r)^2$. Como $(x - r)^2 \geq 0$ para x real, então há dois casos a considerar:

1) se a > 0 então $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x \neq r$, onde é a raiz dupla da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

1) se a < 0 então $ax^2 + bx + c < 0$ para todo $x \neq r$, onde é a raiz dupla da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

iii) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: a equação de 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais.

Completando os quadrados tem-se:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2.\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$$

$$=\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Assim, pode-se afirmar que $ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

Uma vez que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $\Delta > 0$ então há dois casos a considerar:

1) se $a > 0$ então $ax^2 + bx + c > 0$, para todo x real.
2) se $a < 0$ então $ax^2 + bx + c < 0$, para todo x real.

Em resumo, pode-se fazer o seguinte esquema sobre o estudo do sinal de uma expressão da forma $ax^2 + bx + c$:

I) $\Delta < 0$: $\begin{cases} \text{se } a>0 \Rightarrow ax^2+bx+c>0, \ \forall x \in IR \\ \text{se } a<0 \Rightarrow ax^2+bx+c<0, \ \forall x \in IR \end{cases}$

II) $\Delta = 0$: $\begin{cases} \text{se } a>0 \Rightarrow ax^2+bx+c\geq 0, \ \forall x \in IR \\ \text{se } a<0 \Rightarrow ax^2+bx+c\leq 0, \ \forall x \in IR \end{cases}$

III) $\Delta > 0$ (r e s são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, com $r < s$):

1) se $a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$ se $x < r$ ou $x > s$ e $ax^2 + bx + c < 0$ se $r < x < s$

2) se $a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$ se $r < x < s$ e $ax^2 + bx + c < 0$ se $x < r$ ou $x > s$

## Exercícios Resolvidos

1) Encontrar o conjunto solução da inequação $x^2 - 5x + 6 < 0$.

**Solução:**

Uma vez que as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 2 e 3, pode-se reescrever a inequação da seguinte maneira: $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) < 0$.

Perceba que a expressão original do 2° grau foi transformada em uma multiplicação de duas expressões do 1° grau. Logo, $(x - 2)(x - 3)$ será negativo se $x - 2$ e $x - 3$ tiverem sinais contrários, que ocorre quando x pertence a intervalo $]2, 3[$. Assim, a solução da inequação é $2 < x < 3$.

**2)** (Colégio Naval-83) A inequação $2px^2 + x + p > 0$, é satisfeita para qualquer valor real de x, se, e somente se:

a) $p < -\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{4} < p < \frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $p > -\frac{\sqrt{2}}{4}$

d) $p < -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ou $p > \frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $p > \frac{\sqrt{2}}{4}$

**Solução: Alternativa E**

Para que $2px^2 + x + p$ seja maior que zero para todo x real deve-se impor que a equação $2px^2 + x + p = 0$ não possua raízes reais e que o coeficiente de $x^2$ deve ser positivo:

i) $\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 1^2 - 4.p.(2p) < 0 \Rightarrow 8p^2 - 1 > 0 \Rightarrow$

$\left(2\sqrt{2}p+1\right)\left(2\sqrt{2}p-1\right) > 0 \Rightarrow p < -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ou $p > \frac{\sqrt{2}}{4}$ (1)

ii) $2p > 0 \Rightarrow p > 0$ (2)

Fazendo a interseção do intervalo 1 com o intervalo 2 obtém-se $p > \frac{\sqrt{2}}{4}$.

**3)** (EPCAr-01) O maior valor inteiro de x para que a expressão $(x^3 - 5)$ seja menor, numericamente, que a expressão $(x^3 - x^2 + 5x - 5)$ é

a) 0 b) 1 c) 4 d) 5

**Solução: Alternativa C**

Apesar de as duas expressões apresentadas serem do 3° grau, após os devidos cancelamentos pode-se encontrar uma inequação do 2° grau.

$x^3 - 5 < x^3 - x^2 + 5x - 5 \Rightarrow x^2 - 5x < 0 \Rightarrow x(x - 5) < 0$

Assim, x e $x - 5$ devem ter sinais contrários, fazendo com que x pertença ao intervalo $]0, 5[$.

O maior valor inteiro de x é 4.

**4)** (AFA-03) O conjunto $\{x \in \Re / f(x) < 0\}$, onde $f: \Re \to \Re$ é definida por $f(x) = ax^2 + 2a^2x + a^3$, com $a \in \mathbb{R}_-^*$, é

a) $]-\infty; -a[$ b) $]-\infty; -a[ \cup ]-a; +\infty[$

c) $]-\infty; a[ \cup ]a; +\infty[$ d) $]-\infty +\infty[$

**Solução: Alternativa C**

Analisando o discriminante da $ax^2 + 2a^2x + a^3$ tem-se:

$$\Delta = (2a^2)^2 - 4(a)(a^3) = 4a^4 - 4a^4 = 0$$

Assim, a equação $ax^2 + 2a^2x + a^3 = 0$ possui duas raízes reais idênticas.

Observe agora que: $f(x) = ax^2 + 2a^2x + a^3 = a(x^2 + 2ax + a^2) = a(x + a)^2$

Uma vez que $a < 0$ e $(x + a)^2 > 0$ para todo $x \neq a$, então $a(x + a)^2$ será menor que 0 para todo $x \neq a$.

Portanto, o intervalo de variação de x é $]-\infty; a[ \cup ]a; +\infty[$.

**5)** (Escola Naval-90) $x^2 + 1 > kx$ para todo x real se, e só se:

a) $k < 0$ b) $k > 0$ c) $-1 < k < 1$ d) $-2 < k < 2$ e) $k > 3$

**Solução: Alternativa D**

Desenvolvendo a expressão fornecida:

$x^2 + 1 > kx \Leftrightarrow x^2 - kx + 1 > 0$

Para que a expressão de 2º grau $x^2 - kx + 1$ seja positiva para todo x real o discriminante de $x^2 - kx + 1$ deve ser negativo:

$\Delta < 0 \Rightarrow k^2 - 4.1.1 < 0 \Rightarrow k^2 - 4 < 0 \Rightarrow (k-2)(k+2) < 0$

Assim, $k - 2$ e $k + 2$ devem ter sinais opostos, fato que ocorre quando está no intervalo $]-2, 2[$.

Assim, a resposta da questão é $-2 < k < 2$.

**6)** Prove que se $2x + 4y = 1$ então $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$, onde x e y são números reais

**Solução:**

Se $2x + 4y = 1$ então $y = \frac{1}{4} - \frac{x}{2}$

Portanto:

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{20} = x^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{20} = x^2 + \frac{1}{16} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{20} = \frac{5x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{80} =$$

$$= \frac{100x^2 - 20x + 1}{80}$$

Considere agora a expressão de 2º grau $P = 100x^2 - 20x + 1$

O seu discriminante vale: $\Delta = b^2 - 4ac = (20)^2 - 4.1.100 = 0$

Assim, P é uma expressão de 2º grau com $\Delta = 0$ e coeficiente $a > 0$, ou seja, $P \geq 0$ para todo x real.

$$P \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{20} \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$$

## 9.7. SISTEMAS DE INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

O método para resolver um sistema de inequações do 2º grau é idêntico ao método para resolver um sistema de inequações do 1º grau.

1) Inicialmente deve-se determinar o conjunto solução de cada uma das inequações;

2) Depois basta identificar os números ou intervalos que pertencem simultaneamente a cada um dos conjuntos soluções já determinados.

Em outras palavras, o conjunto solução de um sistema de equações do 2º grau é igual à interseção dos conjuntos soluções de cada uma das inequações que compõe o sistema. Na verdade, este método não é usado somente para inequações do 1º e 2º graus; qualquer sistema de inequações é resolvido fazendo a interseção dos conjuntos soluções de cada inequação do sistema.

Cada inequação do sistema deve ser do 2º grau. Por isso é importante relembrar como o processo de determinação do sinal de uma expressão da forma $ax^2 + bx + c$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da expressão.

**I)** $\Delta < 0$: $\begin{cases} \text{se } a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0, \ \forall x \in IR \\ \text{se } a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0, \ \forall x \in IR \end{cases}$

**II)** $\Delta = 0$: $\begin{cases} \text{se } a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c \geq 0, \ \forall x \in IR \\ \text{se } a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c \leq 0, \ \forall x \in IR \end{cases}$

**III)** $\Delta > 0$ **(r e s são as raízes de** $ax^2 + bx + c = 0$**, com** $r < s$**):**

**1) se** $a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$ **se** $x < r$ **ou** $x > s$ **e** $ax^2 + bx + c < 0$ **se** $r < x < s$

**2) se** $a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$ **se** $r < x < s$ **e** $ax^2 + bx + c < 0$ **se** $x < r$ **ou** $x > s$

## Exercícios Resolvidos

1) Determine o conjunto solução do sistema de inequações do 2º grau, onde x é um número real:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \\ x^2 - 4x - 21 < 0 \end{cases}$$

Solução:

i) Inicialmente deve-se determinar o conjunto solução de $x^2 - 3x - 10 \geq 0$.
Calculando o discriminante da equação $x^2 - 3x - 10 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-10) = 49$$

Como $\Delta > 0$ então as raízes são reais distintas e valem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 5$$

Desta forma: $x^2 - 3x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 2) \geq 0 \Rightarrow x \leq -2$ ou $x \geq 5$
Assim, $S_1 = \{x \in IR / x \leq -2 \text{ ou } x \geq 5\}$
ii) Resolvendo agora a inequação $x^2 - x + 1 > 0$, pode-se observar que a equação $x^2 - x + 1 = 0$ não possui raízes reais, uma vez que seu discriminante é negativo:

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.1 = -3$$

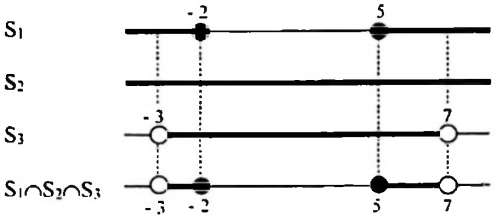
Assim, como o coeficiente de $x^2$ é positivo, para qualquer número real x tem-se que $x^2 - x + 1$ vai sempre assumir somente valores positivos. Desta forma, afirma-se que o conjunto solução da inequação $x^2 - x + 1 > 0$ é $S_2 = \{x \in IR\}$
iii) Calculando o discriminante de $x^2 - 4x - 21 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.(-21) = 100$$

Assim, as raízes da equação $x^2 - 4x - 21 = 0$ são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 10}{2} \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 7$$

Logo: $x^2 - 4x - 21 < 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 7) < 0 \Rightarrow -3 < x < 7$
O conjunto solução da 3ª inequação é $S_3 = \{x \in IR / -3 < x < 7\}$




Desta maneira, a solução do sistema de inequações é

$$S = \{x \in IR / -3 < x \leq -2 \text{ ou } 5 \leq x > 7\}$$

## 9.8. INEQUAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES PRODUTO E FUNÇÕES RACIONAIS

### 9.8.1. Definições:

**Função Produto**: Define-se função produto como sendo toda função que pode ser expressa na forma $f(x) = g(x).f(x)$, onde $g(x)$ e $h(x)$ são polinômios na variável x.

**Função Racional**: Define-se função racional como sendo toda função que pode ser expressa na forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, onde $g(x)$ e $h(x)$ são polinômios na variável x.

### 9.7.2. Determinação do Conjunto Solução

A determinação do conjunto solução de uma inequação que envolva função produto ou função racional é realizada em três etapas:

i) As expressões algébricas presentes na inequação devem ser reduzidas até que fiquem da forma $\frac{P_1.P_2...P_n}{Q_1.Q_2...Q_m} > 0$ ou $< 0$ ou $\geq 0$ ou $\leq 0$, onde $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$, $Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_m$ são polinômios;

ii) A variação do sinal de cada um dos polinômios, em função da variação de x, deve ser analisada. Aqui deve-se tomar muito especial cuidado com as raízes dos polinômios que pertencem ao denominador da expressão reduzida, pois estas raízes não podem fazer parte do conjunto solução, senão implicariam em uma divisão por zero;

iii) Partindo do fato que o sinal, em determinado intervalo, de uma multiplicação ou divisão de polinômios depende exclusivamente da paridade da quantidade de polinômios que são negativos naquele intervalo, deve-se determinar o sinal da expressão reduzida em cada intervalo.

Observe a aplicação destas etapas na resolução do exemplo seguinte:

## Exercícios Resolvidos

**1)** (EPCAr-99) Quantos **números inteiros** solucionam a inequação $\frac{3x-2}{x-6} < 1$?

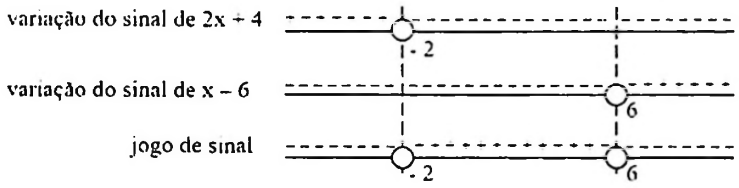
a) Seis. b) Sete. c) Oito. d) Infinitos.

**Solução: Alternativa B**

Já aprendemos como determinar o conjunto solução de uma inequação que seja $> 0$ ou $< 0$ ou $\geq 0$ ou $\leq 0$. Para obter esse tipo de expressão, basta passar o 1 do membro direito para o membro esquerdo, invertendo seu sinal:

$$\frac{3x-2}{x-6}<1 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-6}-1<0 \Leftrightarrow \frac{3x-2-(x-6)}{x-6}<0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{3x-2-x+6}{x-6}<0 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x-6}<0$$

Analisando a variação do sinal das expressões que aparecem no numerador e denominador:




Desta forma, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in IR / x < -2 \text{ ou } x > 6\}$
Neste intervalo os números inteiros são – 1, 0, 1, 2, 3, 4 e 5, ou seja, são em número de 7.
Assim, a alternativa correta é B.

**2)** (ITA-00) Sendo $I$ um intervalo de números reais com extremidades em a e b com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I. Considere a inequação:

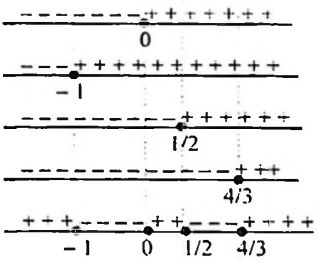
$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$$

A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{7}{3}$

(D) $\frac{11}{6}$ (E) $\frac{7}{6}$

**Solução: Alternativa D**
Inicialmente, deve-se fatorar a expressão algébrica fornecida como multiplicação de fatores de grau menor, de preferência do 1º ou 2º grau.
Para tanto, vamos lançar mão do método de fatoração por agrupamento:
$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x = x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4) = x(6x^3 + 6x^2 - 11x^2 - 11x + 4x + 4) =$
$= x[6x^2(x + 1) - 11x(x + 1) + 4(x + 1)] = x(x + 1)(6x^2 - 11x + 4) =$
$= x(x + 1)(2x - 1)(3x - 4)$
Assim, a expressões original foi fatorada como a multiplicação de 4 expressões do 1º grau, o que facilita a análise do sinal da expressão original.
Analisando a variação dos sinais de cada uma destas expressões:




Portanto, há dois intervalos em que $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$, a saber:

$$-1 < x < 0 \quad \text{ou} \quad 1/2 < x < 4/3$$

Assim, a soma dos comprimentos destes intervalos vale:

$$S = [0 - (-1)] + (4/3 - 1/2) = 1 + 5/6 = 11/6$$

Logo, a alternativa correta é D.

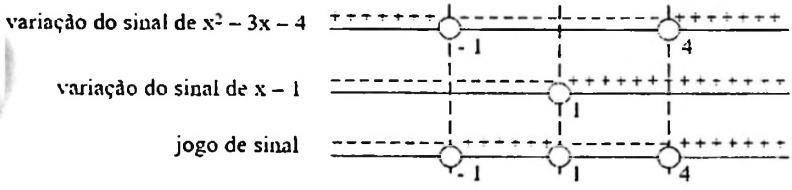
**3)** (Colégio Naval-66) Resolver $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 1} < 0$

**Solução:**

Inicialmente observa-se fatorando-se o numerador obtém-se:

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$$

Assim, as raízes de $x^2 - 3x - 4 = 0$ são 4 ou – 1.




Desta forma, o conjunto solução da inequação $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 1}$ é

$$S = \{x \in \mathbb{R} / (-\infty, -1[ \cup ]1, 4[\}$$

## 9.9. INEQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

**9.9.1. Definição**: Uma inequação é classificada como simultânea se for de umas das formas seguintes:

$$F < G < H \text{ ou } F \leq G < H \text{ ou } F < G \leq H \text{ ou } F \leq G \leq H,$$

onde F, G e H são expressões algébricas.

**9.9.2. Determinação do Conjunto Solução**

A determinação do conjunto solução de uma inequação simultânea da forma $F < G < H$ consiste em resolver o sistema de inequações $\begin{cases} F < H \\ G < H \end{cases}$.

Para os outros sinais de desigualdade a maneira de resolver é análoga. Observe os exemplos resolvidos para entender melhor a determinação do conjunto solução de uma inequação simultânea.

### Exercícios Resolvidos

**1)** (PUC/PR-08) A soma dos números inteiros x que satisfazem $2x + 1 \leq x + 3 \leq 4x$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) -2

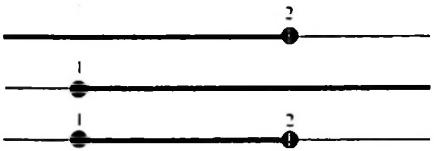
**Solução: Alternativa D**

Resolver a inequação simultânea $2x + 1 \leq x + 3 \leq 4x$ é equivalente a resolver o sistema de inequações do 1º grau $\begin{cases} 2x + 1 \leq x + 3 \\ x + 3 \leq 4x \end{cases}$.

i) $2x + 1 \leq x + 3 \Rightarrow x \leq 2$

ii) $x + 3 \leq 4x \Rightarrow -3x \leq -3 \Rightarrow x \geq 1$

Fazendo a interseção dos intervalos que são respostas de cada uma das inequações do sistema:




Assim, o conjunto solução da inequação simultânea é $\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 2\}$. Neste intervalo os valores inteiros são 1 e 2, cuja soma é 3.

**2)** (IME-81) Determine os valores de h, de modo que a desigualdade $-3 < \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ seja válida para qualquer x real.

Solução:

Sabe-se que resolver a inequação simultânea $-3 < \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ equivale a resolver o sistema de inequações $\begin{cases} \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} > -3 \\ \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \end{cases}$

i) $\frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} > -3 \Rightarrow \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} + 3 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - hx + 1 + 3x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 1} > 0 \Rightarrow$

$\frac{4x^2 + (3 - h)x + 4}{x^2 + x + 1} > 0 \quad (1)$

Como o discriminante de $x^2 + x + 1$ é negativo (vale $-3$) e o coeficiente de $x^2$ é positivo (vale 1) então tem-se que, para todo x real, $x^2 + x + 1 > 0$. Logo, como o denominador é positivo, a divisão (1) será positiva se o numerador também for positivo.

Desta forma, tem-se que $4x^2 + (3 - h)x + 4 > 0$, para todo x real, que ocorre somente quando $\Delta < 0$:

$\Delta < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (3 - h)^2 - 4.4.4. < 0 \Rightarrow 9 - 6h + h^2 - 64 < 0 \Rightarrow$

$h^2 - 6h - 55 < 0 \Rightarrow (h - 11)(h + 5) < 0 \Rightarrow -5 < h < 11$

ii) $\frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \Rightarrow \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - hx + 1 - 3x^2 - 3x - 3}{x^2 + x + 1} < 0 \Rightarrow$

$\frac{-2x^2 - (3 + h)x - 2}{x^2 + x + 1} < 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + (3 + h)x + 2}{x^2 + x + 1} > 0 \quad (2)$

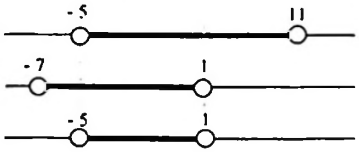
Como o discriminante de $x^2 + x + 1$ é negativo (vale $-3$) e o coeficiente de $x^2$ é positivo (vale 1) então tem-se que, para todo x real, $x^2 + x + 1 > 0$. Logo, como o denominador é positivo, a divisão (1) será positiva se o numerador também for positivo.

Desta forma, tem-se que $4x^2 + (3 - h)x + 4 > 0$, para todo x real, que ocorre somente quando $\Delta > 0$:

$\Delta < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (3 + h)^2 - 4.2.2. < 0 \Rightarrow 9 + 6h + h^2 - 16 < 0 \Rightarrow$

$h^2 + 6h - 7 < 0 \Rightarrow (h + 7)(h - 1) < 0 \Rightarrow -7 < h < 1$

Fazendo a interseção dos dois intervalos:




Assim, tem-se que $-3 < \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$, para todo x real, se $-5 < h < 1$.

## 9.10. INEQUAÇÕES MODULARES

### 9.10.1. Definição:

Uma inequação é classificada como inequação modular se em sua expressão ocorrerem módulos de termos algébricos. Estes termos algébricos podem ser polinômios ou funções racionais. Por exemplo, pode-se classificar como inequação modular cada uma das inequações seguintes:

1) $|x| + |x + 1| > 3$

2) $6 < |x^2 - 5x + 6| < 10$

3) $\left|\frac{x^2 + 3x + 4}{x - 1}\right| \geq 7$

### 9.10.2. Determinação do Conjunto Solução

A determinação do conjunto solução de uma inequações modular consiste das seguintes etapas:

i) Determinação do sinal das expressões algébricas contidas nos módulos, identificando os intervalos da variável onde ocorre alternância de sinal;

ii) Separação da solução da inequação em diversos intervalos da variável, onde os intervalos são definidos de acordo com a mudança de sinal de pelos menos uma das expressões algébricas. Nesta etapa, as barras dos módulos podem ser retiradas após a análise dos sinais, colocando um sinal negativo à frente da expressão algébrica se ela for negativa neste intervalo ou colocando um sinal positivo à frente da expressão algébrica se ela for positiva neste intervalo;

iii) Fazer a interseção do intervalo obtido algebricamente após a correta extração das barras dos módulos com o respectivo intervalo de validade da variável em estudo. Nesta etapa, serão determinados vários intervalos, um para cada intervalo da variável de estudo;

iv) Finalmente, o conjunto solução final é calculado fazendo a união dos intervalos definidos na etapa anterior.

Perceba que é possível, na etapa iii deste procedimento, que em um ou mais intervalos da variável o conjunto solução seja vazio.

Observe a resolução dos exemplos abaixo para entender melhor como deve ser realizada a solução de uma inequação modular.

## Exercícios Resolvidos

**1)** Determine o conjunto solução da inequação $|x - 1| + |x + 3| \leq 6$.

**Solução:**

Analisando os sinais das expressões algébricas contidas em cada módulo:

$x - 1 < 0$ quando $x < 1$ e $x - 1 \geq 0$ quando $x \geq 1$

$x + 3 < 0$ quando $x < -3$ e $x + 3 \geq 0$ quando $x \geq -3$

Assim, deve-se separar a análise em três intervalos:

i) $x < -3$ (neste intervalo as duas expressões algébricas são negativas):

$-(x - 1) - (x + 3) \leq 6 \Rightarrow -x + 1 - x - 3 \leq 6 \Rightarrow -2x \leq 8 \Rightarrow x \geq -4$

Fazendo a interseção entre $x < 3$ e $x \geq -4$ encontra-se $S_1 = -4 \leq x < 3$

ii) $-3 \leq x < 1$ (neste intervalo $x - 1$ é negativo enquanto que $x + 3$ é positivo):

$-(x - 1) + (x + 3) \leq 6 \Rightarrow -x + 1 + x + 3 \leq 6 \Rightarrow 4 \leq 6$

Como a inequação acima é sempre correta independentemente de x, qualquer x neste intervalo é solução

Logo, o conjunto solução deste intervalo é $S_2 = -3 \leq x < 1$

iii) $x \geq 1$ (neste intervalo as duas expressões algébricas são positivas):

$+(x - 1) + (x + 3) \leq 6 \Rightarrow x - 1 + x + 3 \leq 6 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$

Fazendo a interseção entre $x \geq 1$ e $x \leq 2$ encontra-se $S_3 = 1 \leq x \leq 2$

O conjunto solução final é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 2\}$

**2)** (Escola Naval-05) O conjunto dos números reais $x$ que satisfaz a desigualdade $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4$ é

a) $]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$

b) $]-\infty, -2[ \cup ]-\frac{5}{6}, +\infty[$

c) $[-\frac{11}{2}, -\frac{5}{6}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$

d) $]-\infty, -\frac{11}{2}] \cup [-\frac{5}{6}, +\infty[$

e) $]-\infty, -\frac{5}{6}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$

**Solução: Alternativa D**

Inicialmente, deve-se analisar a variação do sinal de $\frac{3-2x}{2+x}$.

Para tanto, deve-se resolver a inequação $\frac{3-2x}{2+x} \geq 0$, cujo conjunto solução é dado por $-2 < x \leq 2/3$. Assim, para os demais números reais, ou seja, para $x \in (-\infty, -2] \cup [2/3, +\infty)$ tem-se $\frac{3-2x}{2+x} < 0$.

i) $x \in ]-2, 2/3]$: $\frac{3-2x}{2+x} \leq 4 \Rightarrow \frac{3-2x}{2+x} - 4 \leq 0 \Rightarrow \frac{3-2x-8-4x}{2+x} \leq 0 \Rightarrow$

$\frac{-6x-5}{2+x} \leq 0 \Rightarrow \frac{6x+5}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [-5/6, +\infty)$

Fazendo a interseção entre os intervalos $]-2, 2/3]$ e $(-\infty, -2] \cup [-5/6, +\infty)$ encontra-se $A = [-5/6, 2/3]$

ii) $x \in (-\infty, -2] \cup [2/3, +\infty)$: $-\left(\frac{3-2x}{2+x}\right) \leq 4 \Rightarrow \frac{-3+2x}{2+x} - 4 \leq 0 \Rightarrow$

$\frac{-3+2x-8-4x}{2+x} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x-11}{2+x} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x+11}{x+2} \geq 0 \Rightarrow$

$x \in (-\infty, -11/2] \cup [-2, +\infty)$

Fazendo a interseção entre $(-\infty, -2] \cup [2/3, +\infty)$ e $(-\infty, -11/2] \cup [-2, +\infty)$ encontra-se $B = (-\infty, -11/2] \cup [-2/3, +\infty)$

O conjunto solução é a união dos intervalos A e B:

$S = A \cup B = [-5/6, 2/3] \cup (-\infty, -11/2] \cup [-2/3, +\infty) = (-\infty, -11/2] \cup [5/6, +\infty)$

**3)** (AFA-05) A soma dos números inteiros que satisfazem a sentença

$$3 \leq |2x - 3| < 6$$

é um número

a) impar. b) primo. c) divisível por 3 d) que é divisor de 7

**Solução: Alternativa C**

Sabe-se que $2x - 3 \geq 0$ para $x \geq 3/2$ e $2x - 3 < 0$ para $x < 3/2$

i) $x \geq 3/2$: $3 \leq 2x - 3 < 6 \Rightarrow 3 + 3 \leq 2x - 3 + 3 < 6 + 3 \Rightarrow 6 \leq 2x < 9 \Rightarrow$

$3 \leq x < 9/2$

Fazendo a interseção entre $x \geq 3/2$ e $3 \leq x < 9/2$ encontra-se $3 \leq x < 9/2$

ii) $x < 3/2$: $3 \leq -(2x - 3) < 6 \Rightarrow 3 \leq 3 - 2x < 6 \Rightarrow$

$3 - 3 \leq 3 - 2x - 3 < 6 - 3 \Rightarrow 0 \leq -2x < 3 \Rightarrow -3/2 < x \leq 0$

Fazendo a interseção entre $x < 3/2$ e $-3/2 < x \leq 0$ encontra-se $-3/2 < x \leq 0$

Logo, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} / -3/2 < x \leq 0$ ou $3 \leq x < 9/2\}$

Os números inteiros que pertencem a este conjunto solução são $-1$, 0, 3 e 4, cuja soma é 6, que é um número divisível por 3.

**4)** (Fuvest-12) Determine para quais valores reais de x é verdadeira a desigualdade

$$|x^2 - 10x + 21| \leq |3x - 15|.$$

**Solução:**

Inicialmente deve-se fazer o estudo dos sinais de $x^2 - 10x + 21$ e $3x - 15$.

Como as raízes de $x^2 - 10x + 21 = 0$ são 3 e 7, então $x^2 - 10x + 21 > 0$ para $x < 3$ ou $x > 7$ e $x^2 - 10x + 21 < 0$ para $3 < x < 7$.

Como a raiz de $3x - 15 = 0$ é 5, tem-se que $3x - 15 > 0$ para $x > 5$ e $3x - 15 < 0$ para $x < 5$.

Assim, é necessário dividir a análise em 4 intervalos:

i) $x < 3$ ($x^2 - 10x + 21 > 0$ e $3x - 15 < 0$):

$x^2 - 10x + 21 \leq -(3x - 15) \Rightarrow x^2 - 7x + 6 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 6$

Fazendo a interseção entre $x < 3$ e $1 \leq x \leq 7$ encontra-se $1 \leq x < 3$ (1)

ii) $3 \leq x < 5$ ($x^2 - 10x + 21 < 0$ e $3x - 15 < 0$):

$-(x^2 - 10x + 21) \leq -(3x - 15) \Rightarrow x^2 - 13x + 36 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ ou $x \geq 9$

Fazendo a interseção entre $3 \leq x < 5$ e $x \leq 4$ ou $x \geq 9$ encontra-se $3 \leq x \leq 4$ (2)

iii) $5 \leq x < 7$ ($x^2 - 10x + 21 < 0$ e $3x - 15 > 0$):

$-(x^2 - 10x + 21) \leq 3x - 15 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ ou $x \geq 6$

Fazendo a interseção entre $5 \leq x < 7$ e $x \leq 1$ ou $x \geq 6$ encontra-se $6 \leq x < 7$ (3)

iv) $x \geq 7$ ($x^2 - 10x + 21 > 0$ e $3x - 15 > 0$):

$x^2 - 10x + 21 \leq 3x - 15 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 \leq 0 \Rightarrow 4 \leq x \leq 9$

Fazendo a interseção entre $x \geq 7$ e $4 \leq x \leq 9$ encontra-se $7 \leq x \leq 9$ (4)

Fazendo a união dos intervalos (1), (2), (3) e (4):

$1 \leq x < 3 \cup 3 \leq x \leq 4 \cup 6 \leq x < 7 \cup 7 \leq x \leq 9 = 1 \leq x \leq 4$ ou $6 \leq x \leq 9$,

que é o conjunto solução da inequação $|x^2 - 10x + 21| \leq |3x - 15|$.

**5)** (ITA-17) O número de soluções inteiras da inequação $0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2$ é

A ( ) 1. B ( ) 2. C ( ) 3. D ( ) 4. E ( ) 5.

**Solução: Alternativa C**

$$|3x^2 + 8x| = \begin{cases} 3x^2 + 8x, x \leq -8/3 \text{ ou } x \geq 0 \\ -(3x^2 + 8x), -8/3 < x < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $x \leq -\frac{8}{3}$ ou $x \geq 0$: $0 \leq -2x^2 - 8x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq -x^2 - 4x \leq 1$

I. $x^2 + 4x \leq 0 \Rightarrow S_1 = [-4, 0]$

II. $x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Rightarrow S_2 = \left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right]$

III. $S_1 \cap S_2 = \left[-4, -2 - \sqrt{3}\right]$

Caso 2: $-\frac{8}{3} < x < 0$

IV. $0 \leq 2x^2 + 4x \Rightarrow S_3 = (-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$

V. $2x^2 + 4x \leq 1 \Rightarrow S_4 = \left(\frac{-2 - \sqrt{6}}{2}, \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}\right)$

VI. $S_3 \cap S_4 = (-8/3, 2]$

Daí, $S = \left[-4, -2 - \sqrt{3}\right] \cup ]-8/3, 2] \cup [0]$

Logo, as soluções inteiras são $S = \{-4, -2, 0\}$

## 9.11. INEQUAÇÕES IRRACIONAIS

### 9.11.1. Definição:

Uma inequação é classificada como inequação irracional se em sua expressão ocorrer pelo menos uma raiz de ordem n (n natural mais ou igual a 2) de uma expressão algébrica. As inequações seguintes são exemplos de inequações irracionais:

1) $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} \leq 1$;

2) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} > 2x - 1$;

3) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x-1}} > 2$.

### 9.11.2. Determinação do Conjunto Solução:

A determinação do conjunto solução de uma inequação irracional consiste das seguintes etapas:

i) No caso da ordem de uma das raízes for par (raiz quadrada, raiz quarta, raiz sexta, ...) deve-se determinar a condição de existência de cada uma destas raízes. Para tanto, basta impor que a expressão algébrica contida nesta raiz seja maior ou igual a zero;

ii) As raízes devem ser eliminadas, utilizando para isso algum processo de fatoração, produto notável ou elevando ambos os membros da inequação à mesma potência. No caso de ser inevitável a potenciação, os intervalos obtidos como resposta devem ser testados na inequação final para verificar se realmente a satisfazem;

iii) Finalmente, o conjunto solução final é igual à interseção entre o intervalo encontrado após as operações algébricas (fatoração, produtos notáveis ou potenciação) e a condição de existência.

Os exemplos seguintes mostrarão como uma inequação irracional deve ser resolvida.

## Exercícios Resolvidos

1) (ITA-05) O menor inteiro positivo **n** para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é

a) 2499 b) 2501 c) 2500 d) 3600 e) 4900

**Solução: Alternativa B**

Condição de existência: $n > 0$ e $n - 1 > 0 \Rightarrow n > 1$

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0{,}01 \Leftrightarrow \sqrt{n}<\frac{1}{100}+\sqrt{n-1}$$

Elevando ao quadrado (os dois lados são positivos):

$$n<\frac{1}{10000}+\frac{\sqrt{n-1}}{50}+n-1 \Rightarrow \sqrt{n-1}>\frac{9999}{200} \Rightarrow$$

$$n-1>\left(\frac{9999}{200}\right)^2 \Rightarrow n>2500{,}5 \Rightarrow n_{min}=2501$$

**2)** (ITA-08) Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{3x^2+2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

**Solução:**

Condição de existência: $3x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq -2/3$ ou $x \geq 0$

Note que tanto $\sqrt{3x^2+2x}$ quanto $x^2$ são expressões algébricas que assumem apenas valores maiores ou iguais a zero. Consequentemente, ao elevar ao quadrado os dois membros da inequação, obtém-se uma inequação equivalente à primeira:

$$\sqrt{3x^2+2x}<x^2 \Leftrightarrow x^4-3x^2-2x>0 \Rightarrow x(x-2)(x+1)^2=0 \Rightarrow$$

$$x<-1 \text{ ou } -1<x<0 \text{ ou } x>2$$

Fazendo a interseção com a condição de existência:

$$S=(-\infty,-1[\cup]-1,-2/3]\cup]2,+\infty)$$

**3)** (IMO-60) Para quais valores da variável x a seguinte inequação é válida:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x+1})^2}<2x+9\,?$$

**Solução:**

Condição de existência: $2x + 1 \geq 0$ e $(1-\sqrt{2x+1})^2 \neq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ e $x \neq 0$ (1)

Fazendo $a=\sqrt{2x+1}$, ou seja, $x=-\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}$ (2), substituindo na inequação original:

$$\frac{4\left(-\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}\right)^2}{(1-a)^2}<2\left(-\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}\right)+9 \Rightarrow \frac{(a^2-1)^2}{(a-1)^2}<a^2+8 \Rightarrow (a+1)^2<a^2+8 \Rightarrow$$

$$a^2+2a+1<a^2+8 \Rightarrow a<\frac{7}{2} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2): $x<-\frac{1}{2}+\frac{49}{8} \Rightarrow x<\frac{45}{8}$ (4)

Fazendo (1) $\cap$ (4) tem-se que o conjunto solução é $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8}$, $x \neq 0$.

## Exercícios propostos

1) (UFSJ-05) Um estudante resolveu a inequação $x < \frac{1}{x}$ valendo-se dos seguintes passos:

1° passo: $\frac{x}{1} < \frac{1}{x}$

2° passo: $x^2 < 1, x \neq 0$

3° passo: $x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$

Em relação a esse raciocínio, é CORRETO afirmar que

A) os três passos estão certos. B) os três passos estão errados.

C) apenas o 2° passo está errado. D) apenas o 3° passo está certo.

2) (UFRGS-17) Sendo a e b números reais distintos, considere as afirmações a seguir.

I) Se $a < b$ então $-a > -b$.

II) Se $a > b$ então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

III) Se $a < b$ então $a^2 < b^2$.

Quais estão corretas?

(A) Apenas I. (B) Apenas II. (C) Apenas III.

(D) Apenas I e II. (E) I, II e III.

3) (UFRGS-18) Sendo a e b números reais quaisquer, considere as seguintes afirmações.

I) $(a-b)^2 \geq 0$.

II) Se $a > b$ então $a^3 > b^3$.

III) Se $a > b > 1$ então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 1$.

Quais afirmações estão corretas?

(A) Apenas I. (B) Apenas II. (C) Apenas III.

(D) Apenas I e II. (E) I, II e III.

4) (UFRGS-19) Sendo a e b números reais positivos quaisquer, considere as afirmações abaixo.

I - Se $a > b$ então $a^x > b^x$, para qualquer $x \in IR$.

II - Se $a > b > 1$, então $\frac{1}{a} < \frac{2}{a+b} < \frac{1}{b}$.

III - Se $a > b$, então $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Quais estão corretas?

(A) Apenas I. (B) Apenas II. (C) Apenas I e III.
(D) Apenas II e III. (E) I, II e III.

5) (UFRGS-20) Considere as seguintes afirmações sobre números racionais.

I – Se $1 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{c}{d}\right)^2$.

II – Se $\frac{a}{b} < 0 < \frac{c}{d}$, então $\frac{c}{d} + \frac{a}{b} > 0$.

III – Toda fração da forma $\frac{a}{b}$ é irredutível.

Quais estão corretas?

(A) Apenas I. (B) Apenas II. (C) Apenas III.
(D) Apenas II e III. (E) I, II e III.

6) (EPCAr-99) Para determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x-3}}$, um estudante procedeu da seguinte forma:

$$\frac{x+5}{x-3} \geq 0 \Rightarrow x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \text{ e } x-3 > 0 \Rightarrow x > 3,$$

e obteve, como resposta, para o domínio da função f, o conjunto $\{x \in IR \mid x > 3\}$

Pode-se afirmar que o desenvolvimento

a) e a resposta estão corretos.
b) está correto e a resposta errada.
c) está errado e a resposta correta.
d) está errado e a resposta correta é $x \leq -5$ ou $x > 3$.

7) (CM Brasília-09) O jacaré Açu é o maior de todos os jacarés, podendo chegar até 6 metros de comprimento e até 300 quilos de peso. Os jacarés jovens devem ter cuidado, pois correm o risco de serem devorados assim que nascem por jiboias ou outros jacarés adultos. Sua média de vida é de 80 anos, mas pode chegar aos 100. Hoje em dia, o jacaré Açu está ameaçado de extinção, pois seu couro é muito cobiçado e sua carne muito saborosa.

(http://www.fiocruz.br/biosseguranca/Bis/infantil/jacareacul.htm)

Um biólogo encontrou um ninho dessa espécie e observou que a quantidade de ovos encontrados é um número que atende as seguintes inequações:

$$\frac{x-4}{15} + \frac{1}{3} > \frac{x}{5} - \frac{3x-10}{21} \quad \text{e} \quad \frac{2-x}{9} - \frac{1-x}{6} > \frac{x}{12} - \frac{23}{18}$$

Diante disso, determine a quantidade de ovos (x) encontrada neste ninho, sabendo que essa quantidade é um número primo.
A) 41 ovos B) 51 ovos C) 45 ovos D) 47 ovos E) 53 ovos

8) (Colégio Naval-98) Um vendedor comprou 50 camisetas por R$ 425,00. Quantas camisetas, no mínimo, deverá vender a R$ 11,00 cada, para obter lucro?
(A) 37 (B) 38 (C) 39 (D) 40 (E) 41

9) (EEAR-06) Dada a inequação $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$, o menor valor inteiro que a satisfaz é um número múltiplo de
a) 3. b) 2. c) 7. d) 5.

10) (UFPA-06) Uma locadora de veículos apresenta, para aluguel de certo tipo de carro, a seguinte tabela:

| 1ª Opção | 2ª Opção |
|---|---|
| Diária mais quilometragem | Diária com o máximo de 100 km por dia |
| R$70,00 por dia + R$0,50 por quilômetro | R$100,00 |

Em uma diária, com percurso não superior a 100km, para que a 2ª opção seja menor em reais, é necessário que o número de quilômetros percorridos pelo locatário pertença ao intervalo
(A) [60,100] (B) ]60,100[ (C) ]60,100]
(D) [0,60] (E) [0,60[

11) (UFPI-07) Um aluno, ao se preparar para a primeira etapa do PSIU/07 da UFPI, resolveu a inequação-quociente $\frac{3x+5}{x-1} \leq 2$, no universo dos números reais, da seguinte maneira:

$$\frac{3x+5}{x-1} \leq 2 \Rightarrow 3x + 5 \leq 2(x-1) \Rightarrow 3x + 5 \leq 2x - 2 \Rightarrow x \leq -7$$

Analisando o procedimento adotado pelo aluno, pode-se afirmar que:
A) O aluno está correto.
B) O aluno está errado, pois a solução correta é: $-7 < x \leq 1$.
C) O aluno está errado, pois ele admitiu que $x \geq 0$.
D) O aluno está errado, pois ele admitiu unicamente que $x > 1$.
E) O aluno está errado, pois ele não fez a inversão do sinal da desigualdade em $\frac{3x+5}{x-1} \leq 2$.

12) (Colégio Naval-94) Se $\begin{cases} \frac{4x-9}{7} < x-3 \\ \frac{3x+10}{4} < 2x-5 \end{cases}$, então:

a) $x < 4$ b) $4 < x < 6$ c) $5 < x < 6$
d) $6 < x < 7$ e) $x > 7$

13) (Unifor-03) A soma de todos os números inteiros que satisfazem a sentença

$$\frac{x-11}{2} < 5-2x < \frac{x}{4}+1 \text{ é}$$

a) 13 b) 12 c) 11 d) 10 e) 9

14) (Unifor-10) Um casal chega no Aeroporto Internacional Pinto Martins, em Fortaleza, e precisa alugar um carro por um único dia. Consultadas duas agências no próprio Aeroporto, verificou que a primeira agência cobra R$ 62,00 pela diária e R$ 1,40 por quilômetro rodado. A outra agência cobra R$ 80,00 pela diária e R$ 1,20 por quilômetro rodado. Nestas condições, podemos afirmar que:
(A) A primeira agência oferece o melhor negócio, qualquer que seja a quilometragem rodada.
(B) A primeira agência cobra menos somente até 80km rodados.
(C) A segunda agência é melhor acima de 100km rodados.
(D) A segunda agência é melhor, se rodados no máximo 120km.
(E) Existe uma quilometragem inferior a 100, na qual as duas agências cobram o mesmo valor.

15) (Colégio Naval-05) A interseção do conjunto solução, nos reais, da inequação $\frac{(x^2-2x+1)^2}{12x-4} \leq 0$ com o conjunto $\{x \in IR / x < 4\}$ é dada por

a) $\{x \in IR / x < \frac{1}{3}\}$ b) $\{x \in IR / x < 0\}$
c) $\{x \in IR / x < \frac{1}{3}\} \cup \{2\}$ d) $\{x \in IR / x < \frac{1}{3}\} \cup \{1\}$
e) $\{x \in IR / x < 2\}$

16) (Colégio Naval-06) Qual é o conjunto – solução S da inequação:

$$[(x-1).(x-2)]^{-1} > [(x-2).(x-3)]^{-1} ?$$

a) $S = \{x \in IR / x < 1\}$
b) $S = \{x \in IR / x < 1 \text{ ou } 1 < x < x\ 2\}$
c) $S = \{x \in IR / x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$
d) $S = \{x \in IR / x < 2\}$
e) $S = \{x \in IR / 2 < x < 3\}$

17) (PUC/MG-11) A e B são duas empresas de táxi. Enquanto a empresa A cobra R$3.80 de bandeirada e R$1.40 por quilômetro rodado, a empresa B cobra R$2.40 por quilômetro rodado e não cobra bandeirada. Para o usuário, é CORRETO afirmar que:
a) a empresa A é sempre mais vantajosa.
b) a empresa B é sempre mais vantajosa.
c) em corridas inferiores a 3.800m, a empresa A é mais vantajosa.
d) em corridas inferiores a 3.800m, a empresa B é mais vantajosa.

18) (Colégio Naval-89) Um subconjunto do conjunto solução da inequação $\frac{1+4x-x^2}{x^2+1} > 0$ é
(A) $\{x \in IR / x > 5\}$ (B) $\{x \in IR / x < 2\}$ (C) $\{x \in IR / x < 0\}$
(D) $\{x \in IR / 0 < x < 4\}$ (E) $\{x \in IR / -1 < x < 3\}$

19) (Colégio Naval-90) O maior valor inteiro que verifica a inequação $x.(x-1).(x-4) < 2.(x-4)$ é:
(A) 1 (B) negativo (C) par positivo
(D) ímpar maior que 4 (E) primo

20) (Colégio Naval-03) Se a e b são dois números reais, denotarmos por min(a, b) o menor dos números a e b, isto é, $\min(a, b) = \begin{cases} a, \text{se } a \le b \\ b, \text{se } a \ge b \end{cases}$. O número de soluções inteiras negativas da inequação $\min(2x - 7, 8 - 3x) > -3x + 3$ é igual a.
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

21) (Colégio Naval-91) Sejam os conjuntos $A = \left\{ x \in \Re \mid \frac{x-3}{x+5} \ge 0 \right\}$, $B = \{x \in \Re \mid (x-3)(x+5) \ge 0\}$ e $C = \{x \in \Re \mid x - 3 \ge 0 \text{ e } x + 5 \ge 0\}$.
Pode-se afirmar que:
a) $A = B = C$ b) $A \subset B \subset C$ c) $A \subset C \subset B$
d) $C \subset A \subset B$ e) $C \subset A = B$

22) (CM Santa Maria-18) O clube de matemática, conhecido como Mathema, tem como um dos seus objetivos auxiliar os alunos na construção do conhecimento de matemática, preparando os mesmos para competições por meia da aplicação dos conteúdos vistos em sala de aula. Pensando nisso, o professor propôs aos participantes do clube os seguintes desafios:

Dadas as funções $f(x) = -2x^2 + 12x - 4$ e $g(x) = x^2 - 3x - 10$, determine os valores reais de x para que se obtenha $\frac{f(x)}{g(x)} \leq -1$.

a) $\{x \in \mathbb{R} / x < -2$ ou $2 \leq x < 5$ ou $x \geq 7\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -2$ ou $2 < x < 5$ ou $x > 7\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 2$ ou $5 < x \leq 7\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 2$ ou $5 \leq x < 7\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} / x < -2$ ou $x \geq 7\}$

23) (Colégio Naval-16) Seja S a soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação $\frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \leq 0$. Pode-se afirmar que

a) S é um número divisível por 7. b) S é um número primo.
c) $S^2$ é divisível por 5. d) $\sqrt{S}$ é um número racional.
e) 3S+1 é um número ímpar.

24) (EPCAr-04) Os valores de x e y no sistema $\begin{cases} x + 2y + k = 0 \\ 3x + 4y + 11 = 0 \end{cases}$ serão ambos negativos quando k for tal que

a) $\frac{11}{5} < k < \frac{11}{2}$ c) $0,666... < k < 8,66...$
b) $\frac{11}{3} < k < \frac{11}{2}$ d) $3,\overline{6} < k < 5,2$

25) (Colégio Naval-85) A soma dos valores inteiros de x, no intervalo $-10 < x < 10$, e que satisfazem à inequação $(x^2 + 4x + 4)(x + 1) \leq x^2 - 4$ é:
(A) 42 (B) 54 (C) −54 (D) −42 (E) −44

26) (Colégio Naval-84) Sendo $A = \{x \in IN / x^2 - 4 = 0\}$, $B = \{x \in Z / -2 \leq x < 5\}$ e $C = \{x \in Z / 0 < \frac{-3x+2}{3} \leq 5\}$ e o conjunto $A \cup (B \cap C)$ é:
a) {0, 2} b) {−2, 2, 1} c) {−2, −1, 0, 2} d){−2, 0, 3, 5} e){−2, 0, 2, 4}

27) (Colégio Naval-81) Um exercício sobre inequações tem como resposta $\{x \in R / x < -1$ ou $0 < x < 5\}$. O exercício pode ser :

(A) $\frac{x^2 - 4x - 5}{-x} > 0$ (B) $\left(-x^3 + 4x + 5x\right) \geq 0$ (C) $\left(x^3 - 4x^2 - 5x\right) > 0$

(D) $\frac{1}{-x^3 + 4x^2 + 5x} \geq 0$ (E) $\frac{-x}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$

**28)** (Colégio Naval-84) $\sqrt{a^2 - 2ab - b^2}$, onde a e b são números positivos, é um número real se, e somente se:

(A) $\frac{a}{b} \geq 1 + \sqrt{2}$ (B) $\frac{a}{b} \geq 2$ (C) $\frac{a}{b} \geq \sqrt{2}$ (D) $\frac{a}{b} \geq 0$ (E) $\frac{1}{b} \geq 1$

**29)** (Colégio Naval-87) O intervalo solução da inequação

$$(x + 3)(x + 2)(x - 3) > (x + 2)(x - 1)(x + 4)$$ é:

a) $(-\infty, \frac{-5}{3})$ b) $(-\infty, -1)$ c) $(-2, \frac{-5}{3})$ d) $(\frac{-5}{3}, +\infty)$ e) $(-1, 2)$

**30)** (Colégio Naval-03) Se x é um número inteiro tal que $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} \leq x - 1$, o número de elementos do conjunto solução dessa inequação é igual a.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

**31)** (Escola Naval-86) O conjunto das soluções da inequação $x^4 - 3x^2 - 4 \geq 0$ é :

a) $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$ b) $[4, \infty)$ c) $[2, \infty)$

d) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ e) $(-\infty, -1] \cup [1, 8)$

**32)** (Escola Naval-89) O conjunto solução da inequação $3|x - 1| + x > |1 - x|$ é

a) $(2/3, \infty)$ b) $(-\infty, 2)$ c) $(2/3, 2)$ d) $\varnothing$ e) $(-\infty, \infty)$

**33)** (CM Salvador-06) A solução do sistema de inequações $\begin{cases} x + 5 < 0 \\ 2x^2 + 8 \geq x^2 - 6x \end{cases}$ é o intervalo:

(A) $x < -5$ (B) $x \geq -2$ (C) $0 < x < 5$

(D) $-5 < x \leq -4$ (E) $-4 \leq x < -2$

**34)** (EPCAr-99) Quer-se que o número real x satisfaça simultaneamente as desigualdades $3 < x < 8$ e $|2x - b| < 5$, em que b é constante. Para isso, o valor de b deve ser um número

a) par negativo.
b) ímpar positivo.
c) múltiplo de 3.
d) divisível por 5.

**35)** (Colégio Naval-84) A soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação:

$$\frac{(-x + 3)^3}{(x^2 + x - 2) \cdot (5 - x)^{11} \cdot (2x - 8)^{10}} \leq 0$$, é:

(A) 11 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 2

**36)** (Colégio Naval-10) O conjunto solução de números reais, tal que o valor da expressão $\frac{(x-5)^{15}(2x-1)^{10}}{(3x+1)^{8}}$ é maior do que, ou igual a zero, é:

a) $[5;+\infty[ \cup \left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$ b) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [5;+\infty[$ c) $]-\infty;+\infty[$

d) $\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right] \cup [5;+\infty[$ e) $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [5;+\infty[$

**37)** (AFA-05) Seja: $A = \{x \in IN^* / \frac{24}{x} = n \text{ e } n \neq IN\}$.

Seja: $B = \{x \in IN / \frac{3x+4}{2x+9} - 1 < 0\}$

É correto afirmar que

a) $B - A = \{0\}$ b) $A \cup B$ tem 8 elementos

c) $A \supset B$ d) $A \cap B = B$

**38)** (Escola Naval-98) Considere os conjuntos $A=\left\{x \in \Re / \frac{2x-3}{5x-2} \geq 0\right\} \frac{1}{2}$ e $B = \{x \in \Re / x^2 - 5x + 4 < 0\}$. O conjunto solução $A \cap B$ é:

a) [3/2, 4[ b) ]3/2, 4] c) ]1, 3/2] d) ]1, 4] e) $]-\infty, 2/5[ \cup ]4, +\infty[$

**39)** (Escola Naval-94) O conjunto solução de $\left|\frac{2x+1}{x-3}\right| > 3$ é:

(A) $]8/5, 3[ \cup ]3, +\infty[$ (B) $]3, 10[ \cup ]10, +\infty[$ (C) $]-\infty, 8/5[ \cup ]3, 10[$

(D) $]8/5, 3[ \cup ]3, 10[$ (E) $]8/5, 3[ \cup ]10, +\infty[$

**40)** (AFA-99) O conjunto-solução da inequação $|1 + 2x - 3x^2| < 5$ é

a) $\left\{x \in R \mid \frac{\sqrt{19}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{19}}{3}\right\}$.

b) $\left\{x \in R \mid \frac{1-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{19}}{3}\right\}$.

c) $\left\{x \in R \mid \frac{-1-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right\}$.

d) $\left\{x \in R \mid x < \frac{1-\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x > \frac{1+\sqrt{19}}{3}\right\}$.

41) (EEAR-07) No conjunto solução da inequação $\left|1-\frac{x}{3}\right|<5$, a quantidade de números inteiros pares é

a) 14. b) 12. c) 10. d) 8.

42) (Escola Naval-87) Sejam $A = \{x \in R / |x - 4| \leq 2\}$ e $B = \{x \in R / x^2 - 14x + 40 < 0\}$. A diferença A – B é igual a:

a) $\{x \in R / 2 \leq x < 4\}$ b) $\{x \in R / 2 \leq x \leq 4\}$

c) $\{x \in R / 4 < x \leq 6\}$ d) $\{x \in R / 6 < x < 10\}$

e) $\{x \in R / 6 \leq x < 10\}$

43) (Escola Naval-06) O conjunto de todos os números reais que satisfazem à desigualdade $|1-2x|+|x+1|-|2x-3|>2$ é

a) $]-\infty, -\frac{7}{3}[ \cup ]1, \frac{3}{2}[ \cup ]5, +\infty[$ b) $]-\infty, -\frac{7}{3}[ \cup ]1, \frac{3}{2}[ \cup ]5, +\infty[$

c) $]-\infty, -5[ \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$ d) $]-\infty, -5[ \cup ]5, +\infty[$

e) $]-\infty, -5[ \cup ]1, +\infty[$

44) (EsPCEx-11) Considerando a função real $f(x) = (x - 1)|x - 2|$, o intervalo real para o qual $f(x) \geq 2$ é

a) $\{x \in IR / x \geq 3\}$ b) $\{x \in IR / x \leq 0$ ou $x \geq 3\}$

c) $\{x \in IR / 1 \leq x \leq 2\}$ d) $(x \in IR / x \geq 2\}$

e) $\{x \in IR / x \leq 1\}$

45) (CM Manaus-17) O professor Marcos, trabalhando o assunto de inequações nas turmas do 9°ano do Ensino Médio do CMM, criou uma roleta com vários problemas sobre inequações. Ao girar a roleta, o Aluno Pedro deparou-se com o seguinte problema: Determinar os possíveis valores reais de x que satisfazem a inequação $\frac{(x^2-1)^{2015}.(2x+2)^{2016}}{(-x^2+4x)^{2017}} \leq 0$. Dessa forma, podemos afirmar que a solução obtida por Pedro foi:

a) $\{x \in IR; x \leq -1$ ou $0 < x \leq 1$ ou $x > 4\}$

b) $\{x \in IR; x < -1$ ou $x \geq 4\}$

c) $\{x \in IR; 0 \leq x \leq 1$ ou $x > 4\}$

d) $\{x \in IR; x < -1$ ou $0 < x \leq 1$ ou $x \geq 4\}$

e) $\{x \in IR; x \leq -1$ ou $x \geq 4\}$

46) (Colégio Naval-19) A quantidade de soluções inteiras da inequação

$$\frac{1}{x^2-4}+\frac{2}{x+2}\geq 1 \text{ é:}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

47) (CM RJ-04) Dada a desigualdade $\frac{-2x^2+kx-2}{x^2-x+1}>-3$, os valores de k para os quais ela é VERDADEIRA para quaisquer valores de x são:

A) $1 < k < 5$. B) $-1 < k < 4$. C) $k < 1$ ou $k > 5$.

D) $k < -1$ ou $k > 4$. E) $k < 1$ ou $k > 4$.

48) (FGV-07) Um importante conceito usado em economia para analisar o quanto uma variação do preço unitário $p > 0$ influencia na variação da receita é o de elasticidade da demanda, denotado por $E(p)$, uma vez que a elasticidade E é dada em função de p. Se $E(p) > 1$, então se diz que a demanda é elástica, o que quer dizer que um pequeno aumento do preço unitário resulta em uma diminuição da receita, ao passo que um pequeno decréscimo do preço unitário irá causar um aumento da receita. Admitindo a elasticidade da demanda dada por $E(p)=\frac{-p^2-2p+1}{-4p+1}$, então, o intervalo de p para o qual a demanda é elástica é

a) $\left]0,\frac{1}{4}\right[\cup\left]-1+\sqrt{2},+\infty\right[$ b) $\left]\frac{1}{8},2\right[$ c) $]0, 2[$

d) $\left]0,\frac{1}{4}\right[\cup]2,+\infty[$ e) $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$

49) (EsPCEx-17) O conjunto solução da inequação $||x-4|+1|\leq 2$ é um intervalo do tipo [a, b]. O valor de a + b é igual a

a) $-8$ b) $-2$ c) 0 d) 2 e) 8

50) (PUC/RJ-11) Qual é o conjunto das soluções reais de $\frac{x+2}{-x+3}\leq 0$?

a) $(-\infty, -3]\cup(2,\infty)$ b) $(-\infty, -3]\cup(-2,\infty)$ c) $(-\infty, 2]\cup(3,\infty)$

d) $(-2, 3)$ e) $(-\infty, -2]\cup(3,\infty)$

51) (PUC/RJ-10) Determine para quais valores reais de x a inequação é satisfeita: $\frac{x^2-6x+11}{x-1}<1$.

52) (PUC/RJ-10) Considere a função real $g(x) = x^4 - 40x^2 - 144$ e a função real $f(x) = x(x - 4)(x + 4)$.
a) Para quais valores de x temos $f(x) < 0$?
b) Para quais valores de x temos $g(x) < 0$?
c) Para quais valores de x temos $f(x).g(x) > 0$?

53) (PUC/RJ-09) a) Determine para que valores reais de x a desigualdade $x^2 + 5x + 6 \leq 2x + 16$ é verdadeira.
b) Encontre números reais b e c tais que: $x^2 + bx + c \leq 2x + 3 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 7$

54) (PUC/RJ-08) A soma dos números inteiros x que satisfazem
$$2x + 1 \leq x + 3 \leq 4x \text{ é:}$$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) -2

55) (UCS-09) O lucro de duas lojas (identificadas com os números 1 e 2), com a venda de x unidades do mesmo tipo de produto, é dado pelas expressões: $L_1(x) = 100(10 - x)(x - 4)$ e $L_2(x) = -120x^2 + 1800x - 4380$. A Loja 2 terá lucro maior do que a Loja 1 somente quando a quantidade de produtos vendidos
a) for maior do que 100. b) estiver entre 19 e 100. c) estiver entre 1 e 19.
d) for igual a 19. e) for igual a 1 e 19.

56) (Udesc-05) Considere os conjuntos: $A = \{x \in IN / |x - 1| \leq 4\}$ e $B = \{x \in Z / |x + 2| > 3\}$. O conjunto $C = A \cap B$, é:
a) {2, 3, 4, 5} b) {6, 7} c) {... -8, -7, -6}
d) {0, 1, 2, 3, 4, 5} e) {0, 1}

57) (Udesc-09) Considere as funções $f(x) = |x^2 - 4x|$ e $g(x) = 3x - 6$. Os valores de x que satisfazem a inequação $f(x) > g(x)$ são:
a) $\{x \in IR / -2 < x < 3\}$ b) $\{x \in IR / 3 < x < 6\}$
c) $\{x \in IR / -2 < x < 1\}$ d) $\{x \in IR / x < 1 \text{ ou } x > 6\}$
e) $\{x \in IR / x < 3 \text{ ou } x > 6\}$

58) (Udesc-09) Resolva o sistema $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 < 0 \\ -x^2 + 3x \geq 0 \end{cases}$

59) (Udesc-08) O conjunto solução da inequação $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ é:
a) $\{x \in IR / -1 < x < 3\}$ b) $\{x \in IR / -1 < x \leq 3\}$
c) $\{x \in IR / x < -1 \text{ ou } x > 3\}$ d) $\{x \in IR / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3$
e) $\{x \in IR / -1 \leq x \leq 3\}$

**60)** (AFA-19) Sobre a inequação $\frac{3x^2 + 2x}{x} \geq x^3$, considerando o universo $U \subset IR$, é **INCORRETO** afirmar que possui conjunto solução

a) unitário se $U = \{x \in IR / x > 0 \text{ e } x = 2k, k \in Z_+^*\}$

b) vazio se $U = [2, +\infty[$

c) com infinitas soluções se $U = \{x \in IR / x = 2k + 1, k \in Z\}$

d) com infinitas soluções se $U = \{x \in IR^* / x \leq 2\}$

**61)** (UEA-10) Num laboratório desenvolve-se uma experiência relativa ao aquecimento de uma pequena placa de metal. O estágio inicial da experiência consiste na preparação das condições de segurança. Esse estágio dura uma hora. O aquecimento da placa, efetivamente, começa imediatamente após esses procedimentos, quando a temperatura é de 0 °C. A placa é aquecida lentamente até atingir a temperatura máxima de 1 °C, a partir do que começa a ser resfriada até atingir –3 °C no momento em que a experiência termina. Sabe-se que a temperatura T da placa no instante t medido em horas é dada por $T(t) = -t^2 + 4t - 3$. O intervalo de tempo, em horas, desde o início do aquecimento da placa até o final da experiência é:

(A) [1, 3]. (B) [0,3[. (C) [0,4[. (D) ]1,∞[. (E) [1, 4].

**62)** (UECE-10) A idade de Paulo, em anos, é um número inteiro par que satisfaz a desigualdade $x^2 - 32x + 252 < 0$. O número que representa a idade de Paulo pertence ao conjunto

A) {12, 13, 14}. B) {15, 16, 17}. C) {18, 19, 20}. D) {21, 22, 23}.

**63)** (UEFS-10) O conjunto-solução da inequação $\frac{x^4 - 1}{-x^4 + 2x^3 + 3x^2} \geq 0$ é:

a) $]-\infty, -1]$ b) $]-1, 1[$ c) $[1, 3[$

d) $[3, +\infty[$ e) $]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$

**64)** (UEMA-08) O conjunto-solução da inequação produto

$$(x - 3)(x^2 + 1)(-x^2 + 3x + 10) > 0$$

é dado por

a) $(-\infty, 2[ \cup ]3, 5[$ b) $]-2, 3[ \cup ]3, 5[$ c) $(-\infty, -2[ \cup ]3, 5[$

d) $]-2, 3[ \cup ]5, +\infty)$ e) $(-\infty, 2[ \cup ]5, +\infty)$

**65)** (UEPB-11) A solução da inequação $\frac{(x+3)^3(x^2+5)(x-3)^3}{(3-x)^6} \leq 0$ é o intervalo

a) [ 3 ,∞ [ b) ] − ∞ , 3 ] c) [ 0 , 3 ]

d) ] − ∞ , 3 [ e) ]3 ,∞ [

66) (UEPB-10) O conjunto solução da inequação $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} \geq 0$ é igual a:

a) S = {x ∈ R / x < –3 ou –2 ≤ x ≤ 2 ou x > 3}
b) S = {x ∈ R / x < –3 ou –2 < x ≤ 2 ou x > 3}
c) S = {x ∈ R / x < –3 ou –2 < x < 2 ou x ≥ 3}
d) S = {x ∈ R / x < –3 ou –2 < x ≤ 2 ou x ≥ 3}
e) S = {x ∈ R / x < –3 ou –2 ≤ x ≤ 2 ou x ≥ 3}

67) (IME-17) Resolva a inequação, onde x∈IR: $\frac{9x^2}{\left(1-\sqrt{3x+1}\right)^2} > 4$

68) (UEPG-07) Se A = {x ∈ IR / 2x + 5 > 7} e B = {x ∈ IR / $x^2$ – 9 < 0}, então A ∩ B é:

a) {x ∈ IR / - 3 < x < 3}  b) {x ∈ IR / - 3 < x < 1}  c) {x ∈ IR / x < 3}
d) {x ∈ IR / x > - 3}  e) {x ∈ IR / 1 < x < 3}

69) (CM Brasília-08) O produto de todas as soluções inteiras que satisfazem, simultaneamente, as desigualdades:

3(x + 1) < 9 + 2x, 15x + 5 < 5x + 5 e 16 – 2(x – 2) > 1 – 3(x – 5) é:

A ( ) 0  B ( ) 6  C ( ) -6  D ( ) 24  E ( ) -24

70) (UERN-11) Para que valores do real x, a função real f(x) = $4x^2$ – 9x + 5 assume valores inferiores a 3?

A) 1/2 < x < 4  B) 1/4 < x < 2  C) x < 1 ou x > 4  D) x < 2

71) (UESC-06) O conjunto-solução da equação em x ∈ IR, $\sqrt{(x-1)^2} + 3x > 0$

a) ]- 1/2, 1/4[  b) ]- 1/2, 1[ ∪ ]1, +∞[  c) ]- 1/2, + ∞[
d) ]1/4, + ∞[  e) ]1, + ∞[

72) (UFJF-09) Considere a função f : IR →IR, definida por f (x) = λ$x^2$ + 2λ. x + 1, onde λ ∈ IR. É CORRETO afirmar que:

a) Para λ < 0 a função só assume valores negativos.
b) Para λ > 1 a função só assume valores positivos.
c) Para λ < 0 a função só assume valores positivos.
d) Para λ > 1 a função só assume valores negativos.
e) Para 0 ≤ λ < 1 a função só assume valores positivos.

**73)** (IME-15) Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem às inequações dadas para algum valor de x.

$$2x^2 - 12x + 10 \leq 5y \leq 10 - 2x$$

(A) –3,2 (B) –1,6 (C) 0 (D) 1,6 (E) 3,2

**74)** (UFLA-05) Os valores de para os quais a inequação $\frac{x}{x^2+4} > \frac{x+a}{x^2+1}$ seja verdadeira para todo x são:

a) $a < -3/4$ ou $a > 3/4$ b) $-3/4 < a < 3/4$ c) $a < -3/4$

d) $-4/3 < a < 4/3$ e) $a > 4/3$

**75)** (UFLA-07) Os valores de x que satisfazem a desigualdade $|x^2 - 10x| \geq 16$ são

a) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

b) $(-\infty, -5] \cup [2, 8] \cup [5+\sqrt{41}, +\infty)$

c) $(-\infty, 5-\sqrt{41}] \cup [2, 8] \cup [5+\sqrt{41}, \infty)$

d) $(-\infty, 5-\sqrt{41}] \cup [5+\sqrt{41}, \infty)$

**76)** (Colégio Naval-91) Qual a solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt{x}+2} \cdot \sqrt{\sqrt{x}-2} - 5\sqrt[4]{x-4} + 6 < 0 \\ 1500x^{-1} + x > 80 \end{cases}$$

a) $x > 85$ b) $30 < x < 50$ c) $20 < x < 85$

d) $20 < x < 50$ ou $x > 85$ e) $20 < x < 30$ ou $50 < x < 85$

**77)** (UFRGS-20) Considere $F = |x + 1|$ e $G = -|x| - 1$. O intervalo tal que $F > G$ é

a) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. b) $(-1/2, 1/2)$. c) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

d) $(-1, +\infty)$. e) $(-\infty, +\infty)$.

**78)** (UFPB-09) No intuito de vender, exclusivamente por assinatura, sua principal revista, uma editora estima que, com $x$ milhões de assinantes, o faturamento e o custo mensais, em milhões de reais, são dados, respectivamente, por

$$F(x) = 4 - |4 - 2x| \text{ e } C(x) = 0,5 + 1,5x.$$

Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas:

I.A editora só começa a lucrar com essa revista, quando esta atingir mais de 1 milhão de assinantes.

II.O lucro mensal máximo da editora com essa revista é de R$ 500.000,00.

III.O custo dessa revista, com 3 milhões de assinantes, é maior do que o faturamento.

IV. O faturamento da editora com essa revista será sempre crescente até que sejam atingidos 2,5 milhões de assinantes.

V.O faturamento mensal da editora com essa revista é o mesmo com 1,5 milhão ou com 2,5 milhões de assinantes.

**79)** (Colégio Naval-93) O conjunto-verdade da inequação $\frac{1}{x^2 - x} < \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$ é

(A) $\{x \in IR / x < 0 \text{ ou } x > 1\}$ (B) $\{x \in IR^* / x \neq 1 \text{ e } x \neq 2\}$
(C) $\{x \neq IR / 0 < x < 1\}$ (D) $\{x \neq IR / x > 2\}$
(E) $\{x > 0, x \neq 1 \text{ e } \neq 2\}$

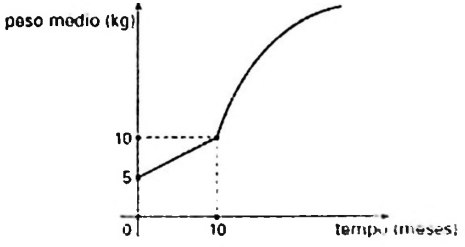
**80)** (UFPI-07) No universo dos números reais, IR, o conjunto-solução da inequação modular $|x - 1| + |x - 2| \geq 1$ é:
A) $\{x \in IR / x \leq 4\}$ B) $\{x \in IR / -2 \leq x \leq 8\}$ C) $\{x \in IR / x \geq 0\}$
D) $\{x \in IR / -2 \leq x \leq 2\}$ E) IR

**81)** (UFPI-06) Seja m a quantidade de números inteiros pertencentes ao conjunto solução, nos números reais, da inequação $x^4 - 4x^2 - 45 < 0$. Então, m é igual a:
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**82)** (CM Brasília-08) O número de soluções inteiras da inequação $\frac{x^2 - 5x + 7}{3x^2 - 3} < 0$ é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) infinitas

**83)** (UFS-10) Considere os conjuntos $A = \{x \in IR \mid x^2 - 4 < 0\}$, $B = \{x \in \cap R \mid x > 0\}$ e $C = \{x \in IR \mid 3x - 3 \leq 0\}$ para analisar as sentenças seguintes.
0 0 - $-3 \in A$
1 1 - $A \cap B = ]0,2[$
2 2 - $C - A = ]-\infty,1[$
3 3 - $B \cup C = R$
4 4 - $A - (B \cap C) = ]-2,0] \cup ]1,2[$

**84)** (UFSCar-10) O gráfico esboçado representa o peso médio, em quilogramas, de um animal de determinada espécie em função do tempo de vida t, em meses.



a) Para $0 \leq t \leq 10$ o gráfico é um segmento de reta. Determine a expressão da função cujo gráfico é esse segmento de reta e calcule o peso médio do animal com 6 meses de vida.

b) Para $t \geq 10$ meses a expressão da função que representa o peso médio do animal, em quilogramas, é $P(t) = \dfrac{120t - 1000}{t + 10}$. Determine o intervalo de tempo t para o qual $10 < P(t) \leq 70$.

**85)** (UFT-10) Resolva a inequação $(n - 9)(x^2 + 4n + 5)(n + 7) < 0$ no conjunto dos números reais. A soma dos números inteiros que satisfazem a inequação acima é:

(A) 3 (C) 12 (E) – 9 (B) 15 (D) – 4

**86)** (IME-17) O sistema de inequações abaixo admite *k* soluções inteiras. Pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 14}{x} > 3 \\ x \leq 12 \end{cases}$$

(A) $0 \leq k < 2$ (B) $2 \leq k < 4$ (C) $4 \leq k < 6$ (D) $6 \leq k < 8$ (E) $k \geq 8$

**87)** (Unesp-09) A frequência cardíaca de uma pessoa, FC, é detectada pela palpação das artérias radial ou carótida. A palpação é realizada pressionando-se levemente a artéria com o dedo médio e o indicador. Conta-se o número de pulsações (batimentos cardíacos) que ocorrem no intervalo de um minuto (bpm). A frequência de repouso, FCRep, é a frequência obtida, em geral pela manhã, assim que despertamos, ainda na cama. A frequência cardíaca máxima, FCMax, é o número mais alto de batimentos capaz de ser atingido por uma pessoa durante um minuto e é estimada pela fórmula FCMax = (220 – x), onde x indica a idade do indivíduo em anos. A frequência de reserva (ou de trabalho), FCRes, é, aproximadamente, a diferença entre FCMax e FCRep. Vamos denotar por FCT a frequência cardíaca de treinamento de um indivíduo em uma determinada atividade física. É recomendável que essa frequência esteja no intervalo

$$50\%FCRes + FCRep \leq FCT \leq 85\%FCRes + FCRep.$$

Carlos tem 18 anos e sua frequência cardíaca de repouso obtida foi FCRep = 65bpm. Com base nos dados apresentados, calcule o intervalo da FCT de Carlos.

88) (Colégio Naval-14) Considere, no conjunto dos números reais, a desigualdade $\frac{2x^2-28x+98}{x-10} \geq 0$. A soma dos valores inteiros do conjunto solução dessa desigualdade que são menores do que $\frac{81}{4}$, é:

a) 172 b) 170 c) 169 d) 165 e) 157

89) (Colégio Naval-98) O número de soluções inteiras da inequação abaixo é:
$\frac{x^2-6x+10}{x^2-1} < 0$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) infinito

90) (Colégio Naval-03) Se o conjunto solução da inequação $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+10 \leq 0$ é s, então o número de elementos da interseção do conjunto s com o conjunto dos números inteiros é igual a.
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

91) (Unimontes-05) Maria e Joana são revendedoras de um certo produto de beleza. Em um determinado mês, a renda mensal (em reais) de Maria foi dada pela função $R(x) = 17x - 30$ e a de Joana foi $R(x) = x^2 + 5x - 3$, onde R é a renda mensal e x é o número de unidades que cada uma vendeu. Maria terá um rendimento mensal maior que o de Joana se vender
a) mais que 9 unidades. b) entre 3 e 9 unidades.
c) exatamente 10 unidades d) 9 unidades.

92) (Unicamp-98) Encontre todos os valores reais de $x$ para os quais $-1 \leq \frac{x^2+4}{4x} \leq 1$.

93) (Unicamp-08) Sejam dadas as funções $f(x) = px$ e $g(x) = 2x + 5$, em que p é um parâmetro real.
a) Supondo que $p = -5$, determine para quais valores reais de x tem-se $f(x).g(x) < 0$.
b) Determine para quais valores de p temos $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [-8, -1]$.

94) (Unicamp-09) Uma lâmpada incandescente de 100W custa R$2,00. Já uma lâmpada fluorescente de 24W, que é capaz de iluminar tão bem quanto a lâmpada incandescente de 100W, custa R$13,40. Responda às questões abaixo, lembrando que, em uma hora, uma lâmpada de 100W consome uma quantidade de energia equivalente a 100Wh, ou 0,1kWh. Em seus cálculos, considere que 1kWh de energia custa R$0,50.

a) Levando em conta apenas o consumo de energia, ou seja, desprezando o custo de aquisição da lâmpada, determine quanto custa manter uma lâmpada incandescente de 100W acesa por 750 horas. Faça o mesmo cálculo para uma lâmpada fluorescente de 24W.

b) Para iluminar toda a sua casa, João comprou e instalou apenas lâmpadas fluorescentes de 24W. Fernando, por sua vez, comprou e instalou somente lâmpadas incandescentes de 100W para iluminar sua casa. Considerando o custo de compra de cada lâmpada e seu consumo de energia, determine em quantos dias Fernando terá gasto mais com iluminação que João. Suponha que cada lâmpada fica acesa 3 horas por dia. Suponha, também, que as casas possuem o mesmo número de lâmpadas.

**95)** (Unicamp-11) O perfil lipídico é um exame médico que avalia a dosagem dos quatro tipos principais de gorduras (lipídios) no sangue: colesterol total (CT), colesterol HDL (conhecido como "bom colesterol"), colesterol LDL (o "mau colesterol") e triglicérides (TG). Os valores desses quatro indicadores estão relacionados pela fórmula de Friedewald: CT = LDL + HDL + TG/5. A tabela abaixo mostra os valores normais dos lipídios sanguíneos para um adulto, segundo o laboratório SangueBom.

| *Indicador* | *Valores normais* |
|---|---|
| *CT* | *Até 200mg/dL* |
| *LDL* | *Até 130mg/dL* |
| *HDL* | *Entre 40 e 60mg/dL* |
| *TG* | *Até 150mg/dL* |

O perfil lipídico de Pedro revelou que sua dosagem de colesterol total era igual a 198mg/dL, e que a de triglicérides era igual a 130mg/dL. Sabendo que todos os seus indicadores estavam normais, qual o intervalo possível para o seu nível de LDL?

**96)** (Fuvest-07) Resolva a inequação $\left|4 - x^2\right| \leq \frac{x+7}{2}$.

**97)** (Fuvest-05) Seja $f(x) = ax^2 + (1 - a)x + 1$, onde a é um número real diferente de zero. Determine os valores de a para os quais as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais e o número $x = 3$ pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.

# Gabaritos

## Capítulo 1: Potenciação e Radiciação

1) c
2) b
3) c
4) d
5) c
6) b
7) c
8) a
9) b
10) a
11) b
12) a
13) d
14) b
15) c
16) a
17) c
18) a
19) e
20) b
21) b
22) c
23) b
24) e
25) d
26) d
27) a
28) b
29) c
30) b
31) b
32) a
33) e
34) e
35) c
36) d
37) a
38) a
39) e
40) c
41) d
42) d
43) $81\sqrt{3}$
44) $x^{72}$
45) $a^2$
46) 4
47) $x^{7/4}$
48) a) A = 5; B = 9; C = 2; D = $4\sqrt[3]{2}$; E = 5
49) $\sqrt[4]{(ab)^7}$
50) 1
51) $a^{\frac{13}{72}}$
52) 5

# Capítulo 2: Bases de Numeração

**1)** 1CF **2)** 1001101 **3)** d

**4)** a **5)** d **6)** V V V F V

**7)** a) 720; b) 5 **8)** a) converter em base 10; b) b

**9)** 800 **10)** 180

**11)** a) 1000..00, com n zeros; b) (x – 1 x – 1 x – 1 ... x – 1), com n algarismos x – 1

**12)** a) $(22333)_5$; b) $(12313)_4$; c) $(4031)_8$; d) $(125)_{10}$; e) $(175)_{10}$; f) $(231)_{10}$; g) $(1221)_5$; h) $(2101)_3$; i) $(164)_7$; j) $(2022)_5$; k) $(2201)_3$; l) $(326)_7$; m) $(1543)_6$; n) $(1010100)_2$; o) $(568)_9$; p) $(21121)_3$; q) $(252)_9$; r) $(3310)_4$; s) $(10011000)_2$; t) $(655)_7$; u) $(17)_9$; v) $(1233)_4$; w) $(138)_9$; x) $(222122)_3$; y) $(1315)_6$; z) $(3033)_4$.

**13)** a **14)** e **15)** a

**16)** e **17)** 57

# Capítulo 3: Médias

**1)** c **2)** a **3)** c

**4)** b **5)** a **6)** d

**7)** b **8)** a **9)** c

**10)** b **11)** 5,5 **12)** e

**13)** c **14)** b **15)** e

**16)** d **17)** d **18)** d

**19)** b **20)** e **21)** d

**22)** e **23)** d **24)** d

**25)** c **26)** b **27)** b

**28)** d **29)** b **30)** a

**31)** c **32)** 6,2 **33)** e

34) c
35) b
36) b
37) 45
38) n = 23 e m = 8
42) b

# Capítulo 4: Sistema Métrico

1) d
2) a
3) d
4) d
5) c
6) d
7) a
8) c
9) b
10) b
11) d
12) d
13) c
14) c
15) b
16) a
17) d
18) b
19) c
20) a
21) e
22) b
23) d
24) c
25) d
26) e
27) e
28) c
29) a
30) d
31) b
32) b
33) d
34) c
35) c
36) b
37) a
38) d
39) d
40) e
41) c
42) a
43) e
44) d
45) b
46) c
47) b
48) d
49) e
50) a
51) d
52) a
53) b
54) b
55) d
56) b
57) c
58) c
59) e
60) b
61) e
62) d
63) c
64) c
65) d

66) a) $0{,}63.10^5$ m b) $v_{(\text{latídica})}/v_{(\text{segura})} \approx 3{,}33$ 67) b

68) e 69) c 70) d

71) a 72) b 73) e

74) d 75) c

# Capítulo 5: Razões e Proporções

**Razão entre duas grandezas**

1) b 2) d 3) a

4) e 5) d 6) d

7) b 8) b 9) b

10) b 11) e 12) e

13) d 14) c 15) b

16) b 17) a 18) c

19) b 20) b 21) d

22) c 23) b 24) a

25) e 26) a 27) a

28) c 29) a 30) d

31) d 32) d 33) a

34) 1/2 35) 1° 36) 2/3

**Proporção**

1) c 2) d 3) b

4) b 5) e 6) b

7) a 8) c 9) a

10) b 11) a 12) a

13) b 14) a 15) e

16) d 17) c 18) c

19) c 20) d 21) c

22) b 23) e 24) b

25) a 26) d 27) a

28) 2 ou – 1 29) c 30) e

31) b 32) 5 : 8 : 11 33) c

34) d 35) 10 $\ell$ do 1º e 4 $\ell$ do 2º 36) 288, 360, 480

37) a) 12; b) 25

**Regra de três**

1) d 2) c 3) e

4) d 5) a 6) b

7) b 8) c 9) c

10) c 11) c 12) c

13) b 14) b 15) a

16) c 17) e 18) b

19) b 20) d 21) c

22) a 23) c 24) e

25) d 26) b 27) b

28) a 29) b 30) b

31) b 32) e 33) b

34) b 35) d 36) a

37) 2/3

**Porcentagem**

1) c 2) b 3) b

4) c 5) a 6) b

7) b 8) b 9) b

10) a 11) b 12) d

13) a 14) b 15) d

16) d
17) d
18) e
19) b
20) c
21) b
22) d
23) d
24) d
25) c
26) e
27) b
28) d
29) b
30) c
31) e
32) c
33) d
34) b
35) b
36) a
37) b
38) b
39) b
40) d
41) d
42) b
43) b
44) a
45) c
46) a
47) d
48) c
49) e
50) d
51) b
52) c
53) d
54) d
55) a
56) c
57) 20%
58) 640
59) e
60) R$ 1000,00
61) c
62) c
63) a
64) a
65) d
66) b
67) a
68) b
69) e
70) c
71) 600
72) 18
73) 65%
74) 15
75) b

**Juros**

1) a
2) c
3) c
4) b
5) a
6) c
7) c
8) b
9) e
10) d
11) a
12) e
13) e
14) d
15) e
16) b
17) a
18) b
19) a
20) c
21) a

22) a 23) c 24) a

25) 4 anos 26) d 27) b

28) b 29) e 30) c

21) d 32) c 33) a

44) t = 8 anos, 10 meses e 20 dias 35) a

36) c 37) c 38) a

# Capítulo 6: Operações Algébricas

**Operações Fundamentais**

1) c 2) b 3) a

4) e 5) c 6) c

7) c 8) d 9) a

10) c 11) b 12) b

13) d 14) c 15) d

16) a

**Produtos Notáveis**

1) a 2) d 3) e

4) c 5) b 6) c

7) a 8) e 9) c

10) c 11) a 12) a

13) b 14) d 15) a

16) e 17) b 18) d

19) b 20) c 21) c

22) b 23) a 24) d

25) c 26) c 27) b

28) c 29) c 30) b

**31)** 11 **33)** b **34)** d

**35)** b **36)** – 1 **39)** $-2^a$

**40)** x = 2, y = – 1 e z = 0 **41)** x = 1, y = 2 e z = 3 **42)** 1:2:3

**44)** 104 **46)** 0 **47)** é racional (vale 6)

**48)** a) 75; b) 0; c) (5, 5, 5) **49)** 160 **51)** $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

**Divisão de Polinômios**

**1)** a **2)** a **3)** a

**4)** d **5)** a **6)** b

**7)** c **8)** e **9)** b

**10)** c **11)** e **12)** b

**13)** a **14)** a **15)** d

**16)** e **17)** b **18)** c

**19)** c **20)** e **21)** a = 3, b = 1

**22)** d **23)** e **24)** e

**25)** a **26)** d **27)** d

**28)** FVVVF **29)** a **30)** b

**31)** 14 **32)** b **33)** a – b

**Fatoração**

**1)** a **2)** a **3)** b

**4)** c **5)** b **6)** c

**7)** a **8)** d **9)** b

**10)** b **11)** d **12)** c

**13)** d **14)** b **15)** a

**16)** c **17)** d **18)** c

**19)** a **20)** a **21)** d

**22)** b **23)** e **24)** d

**25)** e **26)** b **27)** b

**28)** d **29)** b **30)** e

**31)** a **32)** b **33)** $x = y = z = 0$

**34)** c **37)** a **39)** 6/5

**40)** 364 **41)** u.s – p.t **42)** 20

**43)** 25/6 **44)** 1 **46)** a) 6; b) 6

**47)** 0 **49)** 2010 **50)** d

**51)** e **52)** 25 **56)** 83

**58)** 546 **59)** – 9 **60)** 0, 1, 4, 9, 16 ou 25

**MDC e MMC de polinômios**

**1)** MDC = $x^2 - 1$ e MMC = $x^4 - 2x^2 + 1$ **2)** c

**3)** d **4)** a **5)** NULA

**6)** $x(x + 3)$ **7)** b **8)** a

**9)** c **11)** a) 2 e 3; b) m = 22 e n = 163

**12)** x **13)** $x - 1$ **14)** $x + 1$

**15)** $x(x + 3)$ **16)** a = – 2 e b = 3 **17)** $x - 3$

**18)** $x^4 + x^2 + 1$ **20)** $x^{20} - 1$

# Capítulo 7: Frações

**Frações Algébricas**

**1)** e **2)** a **3)** c

**4)** e **5)** b **6)** c

**7)** d **8)** b **9)** e

**10)** e **11)** e **12)** d

**13)** d **14)** c **15)** d

**16)** a **17)** b **18)** d

**19)** d **20)** a **21)** b

22) b 23) b 24) a

25) c 26) b 27) a

28) b 29) c

30) A = 1/10, B = 3/10, C = – 1/10 e D = – 1/10

31) d 32) e 33) e

34) b 35) a 36) d

37) c 38) a 39) e

40) b 41) b 42) d

43) b 44) a 45) b

46) d 47) d 48) c

53) d 54) e 55) ± 1

56) 16/11 57) 18/25 61) c

62) e 63) b 64) e

66) b 67) 49/6 68) 64

**Frações Decimais e Periódicas**

1) e 2) b 3) a

4) c 5) b 6) b

7) e 8) d 9) e

10) b 11) a 12) e

13) d 14) d 15) b

16) d 17) e 18) c

19) b 20) d 21) a

22) d 23) d 24) c

25) e 26) 180 27) d

28) b 29) e 30) c

31) 1/729 32) 5/7 + 4/9 33) a 1ª é maior

34) 5544/13 35) b 36) b

37) a 38) b 39) e

**Racionalização de denominadores irracionais**

1) c
2) d
3) a
4) e
5) a
6) c
7) c
8) d
9) b
10) b
11) b
12) b
13) c
14) c
15) b
16) a
17) a
18) 125
20) $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$
21) $\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{25}$
22) 10201/200
23) b > a
24) d

# Capítulo 8: Equações

**Equações do 1º Grau**

1) c
2) c
3) b
4) a
5) e
6) e
7) a
8) a
9) e
10) 14 anos
11) d
12) d
13) e
14) a
15) c
16) e
17) a
18) d
19) b
20) a
21) c
22) d
23) 9
24) 25000
25) 40 $m^2$
26) 16
27) 5, 6, 7
28) x = 2021

**Sistemas de equações do 1º grau**

1) d
2) c
3) b
4) b
5) c
6) e

7) e
8) R$ 24, R$ 18 e R$ 36
9) R$ 4,00, R$ 2,50 e R$ 3,50
10) c
11) a
12) e
13) c
14) c
15) a
16) d
17) d
18) d
19) e
20) d
21) d
22) a
23) a
24) e
25) a
26) d
27) a
28) c
29) e
30) e
31) d
32) c
33) d
35) d
36) A 3ª equação é $6x + 2y + 3z = 12$
37) 10, 6 e 5
38) a
39) a
40) b

**Equações do 2º grau**

1) e
2) d
3) c
4) d
5) a
6) a
7) e
8) c
9) c
10) a
11) 30
12) b
13) d
14) 12
15) a
16) $p = 2$ e $q = 1$
17) e
18) a
19) c
20) d
21) e
22) a
23) d
24) e
25) e
26) d
27) d
28) b
29) e
30) c
31) e
32) c
33) d
34) a
35) a
36) b
37) e
38) e
39) b
40) a
41) c
42) e
43) a
44) c
45) a

46) c 47) a 48) c

49) c 50) d 51) a

52) d 53) c 54) b

55) a 56) d 57) e

58) d 59) a 60) d

61) c 62) d 63) d

64) a 65) b 66) c

67) a 68) b 69) a

70) b 71) a 71) d

73) d 74) a 76) d

77) d 78) b 79) e

81) a = 9 82) (0, 0), (– 1, 0), 4/3, – 2/3)

83) p = 0 84) 1 e – 2 85) b) $p^2 \neq 4q$

86) a 87) 96 88) 0

89) 144 90) 41 91) e

93) (– 1, 0), (– 1, 3/16) 96) m = 3 97) 10879 e – 10879

99) a) $x^2 + kx = 0$; b) $x^2 + x - 2 = 0$

**Equações Biquadradas**

1) d 2) d 3) d

4) b 5) a 6) a

7) a 8) c 9) e

10) c 11) c

12) a) 2 ou – 2; b) a, - a, b ou – b; c) $\sqrt{10}$ ou $-\sqrt{10}$; d) 1 ou – 1;

e) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 3 ou – 3; f) a, - a, 1/a ou – 1/a

13) a) $p \leq 0 \leq q \leq p^2$; b) $\pm\sqrt{-p+\sqrt{q}} \pm \sqrt{-p-\sqrt{q}}$

**Equações Modulares**

1) d 2) b 3) c

4) c 5) e 6) b

7) c 8) b 9) d

10) b 11) e 12) e

13) c 14) e 15) e

16) b 17) b 18) c

19) a 20) S = {- 2} 21) a

22) S = {- 4, - 1, 3} 23) duas soluções: - 2/3 ou 4

24) d 25) c 26) c

27) c 28) c

**Equações irracionais**

1) e 2) b 3) a

4) e 5) b 6) c

7) b 8) 1 ou 7/3 9) d

10) a 11) c 12) e

13) c 14) b 15) c

16) 15/8 17) e 18) a

19) d 20) d 21) a

22) b 23) a 24) a

25) b 26) $(\sqrt{21}-1)/2$ 27) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

28) $\pm\sqrt{80}$ 29) soma = - 36 e prod = 180

30) – 2/3 31) e 32) c

33) a 34) 3 ou – 81 35) x = – 1

36) 9/4 37) $x \in [5, 10]$ 38) $a \geq 2012^2$

39) c 40) $x = \sqrt{2}$ 41) 20

42) – 12 < c < – 4 43) $(3 \pm \sqrt{2})^4$

44) a) 63a/65 e 0; b) $x = \dfrac{\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{m} - 1}{\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{m} + 1}$; c) 15; d) 25/16; e) $a^2/4$; f) 1;

g) $0, \pm 1, \pm\sqrt{\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}}$; h) $-1, 3, 35$; i) 1, 3; j) 1, - 15; k) 64; l) 1, 2; m) 1; n) 1;

o) 1416; p) 9; q) $17+\sqrt{257}$

**Sistemas de equação não lineares**

**1)** c **2)** e **3)** (3/2, 2/5, 5/3)

**4)** e **5)** b **6)** a

**7)** b **8)** b **9)** e

**10)** d **11)** a **12)** a

**13)** (1, 2) **14)** (1, 32); (16, 1)

**15)** $\{(10+3\sqrt{11}, 10-3\sqrt{11}); (10-3\sqrt{11}, 10+3\sqrt{11}); (4, 16); (16, 4)\}$

**16)** c **17)** b **18)** c

**19)** (1, 1, 1); $\left(a, -\dfrac{1}{a+1}, -\dfrac{a+1}{a}\right), \forall a \in \mathbb{R}^*$ **20)** (0, 0, 0); (1/2, 1/2, 1/2)

**21)** (- 1, - 1, - 1); (1, - 1, 1) **22)** $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ **23)** b

**24)** (0, 0, 0) **25)** $x = y = z = t = 0$

**26)** $a = b = c = \sqrt[3]{2} - 1$ e $d = \sqrt[3]{250} - 1$ **27)** (0, 0), (2, 4), (−2, 4)

**28)** c **29)** $x = \dfrac{2abc}{ac + bc - ab}$ **30)** (1, 2, 3, 4, 5)

**31)** (54, 24, 6) **32)** (9, − 1, 1), (− 1, 9, − 9), (− 9, 1, − 1), (1, − 9, 9).

**33)** a) (4, 1) e (-9, -9/4); b) $\left(\sqrt{10}-1, \dfrac{\sqrt{160}-5}{5}\right), \left(-\sqrt{10}-1, \dfrac{-\sqrt{160}-5}{5}\right)$;

c) (3, 2) e (17/27, -14/9); d) $\left(a^2\sqrt{\dfrac{3}{8}}, -a^2\sqrt{\dfrac{3}{8}}\right)$; e) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right)$ e $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3}, \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{3}\right)$;

f) (2, 0), (0, 2), $\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2},-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2},-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$;

g) $\left(a\frac{2+\sqrt{2}}{2},a\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$e $\left(a\frac{2-\sqrt{2}}{2},a\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$; h) (0, 0), $(\sqrt{7},\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7},-\sqrt{7})$,

(2, 3), (-2, -3), $(\sqrt{19},-\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19},\sqrt{19})$, (3, 2), (-3, -2);

i) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$e $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$;

j) (9, 10, 12) e (10, 9, 12); k) (1, 2, 3) e (-1, -2, -3); l) (2, 8) e (8, 2);

m) (1, 7), (7, - 8), (49/64, 41/8); n) (17/12, 5/3);

o) $(3\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(3\sqrt{2},-\sqrt{2})$ e $(-3\sqrt{2},-\sqrt{2})$;

p) (3, 1), (- 1, - 3), $(\sqrt[3]{13},-\sqrt[3]{13})$;

q) (3, 2, 5), (3, - 2, - 5), (- 3, - 2, 5), (- 3, 2, - 5); r) (9, 3, 1), (1, 3, 9); s) (1, 1, 1);

t) (0, 0), (3, 2), (- 4, - 12); u) (1, 2, 3), (1, 4, 1), (5, 2, - 1), (5, 4, - 3);

# Capítulo 9: Inequações

| | | |
|---|---|---|
| 1) c | 2) d | 3) d |
| 4) d | 5) a | 6) d |
| 7) d | 8) c | 9) b |
| 10) c | 11) d | 12) b |
| 13) e | 14) e | 15) d |
| 16) c | 17) d | 18) d |
| 19) e | 20) a | 21) d |
| 22) a | 23) b | 24) b |
| 25) e | 26) c | 27) a |
| 28) a | 29) c | 30) c |

**31)** d **32)** e **33)** a

**34)** b **35)** e **36)** e

**37)** a **38)** a **39)** d

**40)** b **41)** a **42)** b

**43)** e **44)** a **45)** a

**46)** b **47)** a **48)** d

**49)** e **50)** e **51)** $x < 1$ ou $3 < x < 4$

**52)** a) $x < -4$ ou $0 < x < 4$; b) $-6 < x < -2$ ou $2 < x < 6$; c) $-6 < x < -4$ ou $-2 < x < 0$ ou $2 < x < 4$ ou $x > 6$

**53)** a) $-5 \leq x \leq 2$; b) $b = -9$ e $c = 31$. **54)** d

**55)** c **56)** a **57)** e

**58)** $[0, 2[$ **59)** e **60)** b

**61)** e **62)** b **63)** c

**64)** c **65)** d **66)** d

**67)** $x > 0$ **68)** e **69)** c

**70)** b **71)** c **72)** e

**73)** a **74)** c **75)** c

**76)** c **77)** c **78)** VVVFV

**79)** e **80)** e **81)** e

**82)** b **83)** FVFVV

**84)** a) 8 kg; b) $10 < t \leq 34$. **85)** b **86)** d

**87)** $133,5 \leq FCT \leq 181,45$ **88)** d **89)** b

**90)** b **91)** b **92)** $\{-2, 2\}$

**93)** a) $x < -5/2$ ou $x > 0$; b) $p \leq -3$

**94)** a) R$37,50 e R$9,00; b) 101 **95)** $]112, 130]$

**96)** $[-5/2, -1] \cup [1/2, 3]$ **97)** $-2/3 \leq a < 0$

Marcelo Rufino de Oliveira nasceu em 1976 em Manaus-AM, cidade onde seus pais trabalhavam na época. Sua família é originária de Belém-PA, cidade onde passou a maior parte de sua vida. Ingressou em 1994 no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), onde graduou-se em Eng. Mecânica-Aeronáutica em 1999, porém nunca exerceu a engenharia. Trabalhou por muitos anos na preparação de alunos para concursos militares e olimpíadas de matemática em Belém, tanto como professor quanto coordenador. Em 2000 assumiu a coordenação regional da Olimpíada Brasileira de Matemática no estado do Pará, sendo também responsável pela organização da Olimpíada Paraense de Matemática. Em 2002 participou do Tribunal de Coordenação da Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Fortaleza. Em 2019 aceitou o desafio de trabalhar nas escolas preparatórias para ITA e olimpíadas em Fortaleza, cidade que concentra a maior quantidade de alunos e os maiores resultados do Brasil.

Apesar de ter sua atuação mais conhecida na área de matemática, professor Rufino (como é mais conhecido) também ministra aulas de física para concursos militares e olimpíadas. Também é autor da coleção Técnicas em Olimpíadas de Matemática, do livro A Física no Vestibular do IME e também da coleção Elementos da Física.

Entre suas maiores paixões estão a família e o motociclismo. Adora viajar, sobretudo para praias, cachoeiras e hotéis fazenda. Em seus momentos de lazer longe da família, troca qualquer coisa pela companhia de seus amigos do Pará Moto Clube, tendo percorrido alguns milhares de quilômetros montado em motocicletas de alta cilindrada. Em sua época de faculdade, foi goleiro titular da equipe de futsal do ITA por três anos. Também foi o treinador da equipe feminina de futsal do ITA, quando foram conquistadas as primeiras medalhas do ITA nesta modalidade em competições universitárias.

9 788560 653188